

Контрольное задание по теме
«Свойства краевых задач и методы их решения»
Примерный вариант

1. Найдите гармоническую функцию $u(x, y)$ в круге радиуса $R = 3$, удовлетворяющую на границе области условию Дирихле:

$$u(x, y)|_{x^2+y^2=9} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + 3.$$

2. При каких значениях параметров A и B краевая задача

$$\Delta u(r, \phi) = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = x^2 - Ay^2 + B, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

имеет решение?

3. В области $0 < x < 1, t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_t = 9u_{xx} - 18t + x^2 + x + 5 \cos 5\pi x,$$

$$u_x(0, t) = t, \quad u_x(1, t) = 3t,$$

$$u(x, 0) = 2 + \cos 3\pi x.$$

4. Найдите решение $u = u(r, \varphi)$ уравнения Лапласа в кольце $1 \leq r \leq 2$, удовлетворяющее на его границе следующим условиям:

$$u(1, \varphi) = \sin 2\varphi, \quad u_r(2, \varphi) = 1.$$