

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости

Решить краевую задачу в верхней полуплоскости ($y > 0$):

$$\Delta u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$
$$u(x, 0) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Решение:

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полуплоскости $y > 0$ с граничным условием $u(x, 0) = f(x)$ определяется интегралом Пуассона:

$$u(x, y) := \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{[(t-x)^2 + y^2]} dt$$

Здесь $f(x) := \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

При этом подинтегральная функция

$$F(t) := \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{2 \cdot t}{(t^2 + 1)^2 \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot x + x^2 + y^2)}$$

$$F(t) \text{ factor } i \rightarrow \frac{2 \cdot t}{(t-i)^2 \cdot (t+i)^2 \cdot (t-x+y \cdot i) \cdot (t-x-y \cdot i)}$$

Интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{[(t-x)^2 + y^2]} dt$$

можно вычислить, воспользовавшись теорией вычетов, а именно следующей формулой:

$$I = 2\pi \cdot i \cdot (\text{res}(F(i)) + \text{res}(F(x+i \cdot y)))$$

Найдем вычеты функции $F(t)$ следующим образом.

$$\text{res}_1 = \text{res}(F(i))$$

$$F1 := F(t) \cdot (t-i)^2 \text{ factor, } i \rightarrow \frac{2 \cdot t}{(t+i)^2 \cdot (t-x-y \cdot i) \cdot (t-x+y \cdot i)}$$

Точка $t = i$ - полюс функции $F(t)$ кратности 2.

$$\text{res}_1 := \frac{d}{dt} F1 \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } t = i \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{(x-i) \cdot i}{(1-y^2-x^2+2 \cdot x \cdot i)^2}$$

$$\text{res}_2 = \text{res}(F(x+i \cdot y))$$

Точка $t = x + i \cdot y$ - простой полюс функции $F(t)$.

$$F2 := F(t) \cdot [t - (x + i \cdot y)] \left| \begin{array}{l} \text{factor, } i \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{2 \cdot t}{(t-i)^2 \cdot (t+i)^2 \cdot (t-x+y \cdot i)}$$

$$\text{res}_2 := F2 \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } t = x + i \cdot y \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{(x+y \cdot i) \cdot i}{y \cdot (x-i+y \cdot i)^2 \cdot (x+i+y \cdot i)^2}$$

Таким образом, для интеграла I получаем:

$$I := 2\pi \cdot i \cdot (\text{res}_1 + \text{res}_2) \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot x \cdot (y+1)}{y \cdot (x^2 + y^2 + 2 \cdot y + 1)^2}$$

В результате получим следующее **решение задачи**:

$$u(x, y) := \frac{y}{\pi} \cdot I \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot x \cdot (y+1)}{(x^2 + y^2 + 2 \cdot y + 1)^2}$$

Замечание.

Очевидно, решение задачи в нижней полуплоскости ($y < 0$):

$$\Delta v = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y < 0, \quad v(x, 0) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$v(x,y) := u(x,-y) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{2\cdot x\cdot (y-1)}{\left(x^2+y^2-2\cdot y+1\right)^2}$$