Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

10.04.24

Занятие № 10

Задача Штурма-Лиувилля с граничными условиями 3-го рода

$$\begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \quad h = const > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Для нахождения всех значений параметра c, при которых задача (1) имеет ненулевое решение, рассмотрим три случая:

1) Если $c = 0$, то общее решение уравнения задачи Ш-Л (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = A - hB = 0, \\ X'(l) + hX(l) = A + h(Al + B) = 0. \end{cases}$$

Для определителя матрицы системы имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -h \\ 1 + hl & h \end{vmatrix} = h(2 + hl) \neq 0.$$

Следовательно, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение задачи (1).

Вывод: собственное значения задачи Ш-Л (1) не могут быть равным 0.

2) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda(A - B) - h(A + B) = 0, \\ X'(l) + hX(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) + h(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\lambda - h) - B(\lambda + h) = 0, \\ A(\lambda + h)e^{\lambda l} - B(\lambda - h)e^{-\lambda l} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Полученная система (2) имеет ненулевое решение (A, B), если определитель матрицы системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda - h & -(\lambda + h) \\ (\lambda + h)e^{\lambda l} & -(\lambda - h)e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + h^2)(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) + 2\lambda h(e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) = 0.$$

Уравнение (3) не имеет вещественных корней, отличных от 0, так как при $\lambda < 0$ левая часть уравнения меньше 0, а при $\lambda > 0$ – положительна. Значит, определитель матрицы системы (2) отличен от 0 при любых $\lambda \neq 0$, и система (2) имеет нулевое решение $A = B = 0$. Следовательно, задача (1) имеет только нулевое решение.

Вывод: собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л (1) не могут быть отрицательными.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничным условиям задачи (1). Будем иметь:

$$\begin{cases} \lambda B - hA = 0, \\ \lambda(-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l) + h(A\cos\lambda l + B\sin\lambda l) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Выясним, существуют ли такие $\lambda \neq 0$, при которых определитель матрицы системы (4) равен 0:

$$\begin{vmatrix} -h & \lambda \\ -\lambda\sin\lambda l + h\cos\lambda l & \lambda\cos\lambda l + h\sin\lambda l \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \left(\lambda^2 - h^2\right)\sin\lambda l - 2\lambda h\cos\lambda l = 0 \iff \operatorname{ctg}\lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2\lambda h} \qquad (5)$$

Заметим, что, если λ^* является корнем уравнения (5), то и $(-\lambda^*)$ также является его корнем. Тогда, так как $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$, то для нахождения собственных значений следует выяснить, сколько положительных корней имеет уравнение (5). Графическое решение уравнения (5) (см. рис. 1) позволяет сделать следующий вывод: *существует бесконечное счетное множество положительных корней уравнения* (5) λ_k, $k \in N$.

Для каждого $\lambda = \lambda_k$ система (4) имеет ненулевое решение (A_k, B_k), для которого

$$A_k = \frac{\lambda_k}{h} B_k, \quad \forall B_k \neq 0.$$

Следовательно, собственные значения задачи Ш-Л (1):

$$c_k = \lambda_k^2,$$

где λ_k – положительные корни уравнения (5), и соответствующие им собственные функции:

$$X_k(x) = \frac{\lambda_k}{h} B_k \cos\lambda_k x + B_k \sin\lambda_k x, \quad \forall B_k \neq 0.$$

Пусть $B_k = h \ \forall\, k \in \mathrm{N}$.

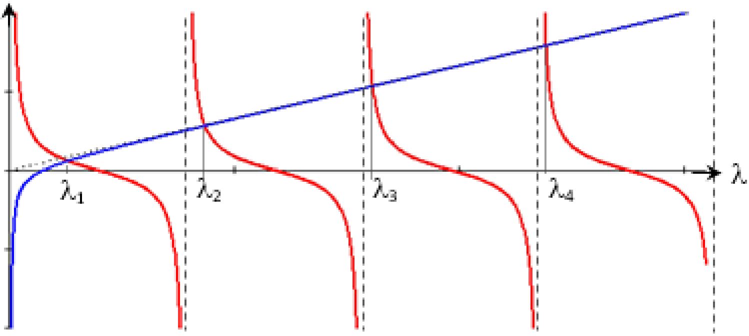

Рис. 1. Графическое решение уравнения (5)

Вывод: Задача Ш-Л имеет решение:

$$X_k(x) = \lambda_k \cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x, \quad k = 1,2,..., \tag{6}$$

где λ_k – положительные корни уравнения

$$ctg\lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \tag{7}$$

Домашнее задание

1) Найти $\left\|X_k(x)\right\|^2$ для собственных функций (6). Полученное выражение преобразуйте к виду, не содержащему тригонометрических функций.

2) Покажите ортогональность собственных функций на отрезке [0, l], соответствующих различным собственным значениям.

17.04.24

Занятие № 11

Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности

Краевая задача, описывающая распространение тепла в однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, когда на концах стержня происходит теплообмен со средой с заданной температурой (пусть A – температура окружающей среды с торцевого сечения $x = 0$, а B – с торцевого сечения $x = l$):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) - h(u(0,t) - A) = u_x(l,0) + h(u(l,t) - B) = 0, \quad t \ge 0, \\ h = const > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \tag{4}$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям:

$$\begin{cases} v'(0) - hv(0) = -Ah, \\ v'(l) + hv(l) = Bh. \end{cases} \tag{5}$$

Функция, удовлетворяющая условиям (5), может быть найдена в виде:

$$v(x) = \alpha x + \beta, \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим систему линейных уравнений, решая которую найдем:

$$\alpha = \frac{h(B - A)}{2 + hl}, \quad \beta = \frac{B + A + Ahl}{2 + hl}. \tag{7}$$

Зная $v(x)$, построим краевую задачу для определения функции $w(x,t)$. Подставив (4) в (1)–(3), получим:

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$w_x(0,t) - hw(0,t) = w_x(l,0) + hw(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{9}$$

$$w(x,0) = \varphi(x) - \alpha x - \beta \overset{]}{=} \varphi_1(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{10}$$

Будем искать решение краевой задачи (8)–(10) в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x), \tag{11}$$

где собственные функции $X_k(x)$ являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (Ш-Л):

$$\begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Задача Ш-Л имеет решение (см. занятие № 10):

$$X_k(x) = \lambda_k \cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x, \quad k = 1,2,..., \tag{13}$$

где λ_k – положительные корни уравнения

$$ctg\lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \tag{14}$$

Подставляя ряд (11) в (8) и (10), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k'(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t) \right) X_k(x) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \varphi_1(x).$$

Тогда функции $T_k(x)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$T_k'(t) + a^2\lambda_k^2 T_k(t) = 0, \quad T_k(0) = \gamma_k, \quad t > 0, \quad k \in N, \tag{15}$$

где

$$\gamma_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} \int_0^l \varphi_1(\xi) X_k(\xi) d\xi, \quad k \in N. \tag{16}$$

Задачи Коши (15) имеют решения:

$$T_k(t) = \gamma_k e^{-(a\lambda_k)^2 t}, \quad k \in N. \tag{17}$$

Подставив (13) и (17) в (11), получим решение задачи (8)-(10):

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-(a\lambda_k)^2 t} \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + h \sin\lambda_k x\right). \tag{18}$$

Замечание. **Фундаментальным решением** задачи (8)-(10) (функцией Грина) является функция:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} e^{-(a\lambda_k)^2 t} X_k(x) X_k(\xi).$$

Вывод: задача (1)–(3) имеет решение

$$u(x,t) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-a^2\lambda_k^2 t} \left(\lambda_k \cos\lambda_k x + h \sin\lambda_k x\right),$$

где α, β и γ_k определяются по формулам (7) и (16).

Гл. 5, § 4, с. 153: № 41 (3)

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = t + 1, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{3}$$

С помощью преобразований:

$$1) \quad u(x,t) = t + 1 + w(x,t),$$
$$2) \quad w(x,t) = e^x z(x,t), \qquad (4)$$

решение исходной краевой задачи сводится к решению следующей:

$$\begin{aligned} &z_t - z_{xx} = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ &z(0,t) = z(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ &z(x,0) = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \qquad (5)$$

Решение задачи (5) ищется в виде:

$$z(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \qquad (6)$$

В (6) функции $\sin kx$, $k = 1,2,...,$ являются решением задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$
$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

После подстановки ряда (6) в уравнение и начальные условия задачи (5) получим следующие задачи Коши:

1) $\begin{cases} T_1^{'}(t) + T_1(t) = 1, \quad t > 0, \\ T_0(0) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} T_2^{'}(t) + 4T_2(t) = 0, \quad t > 0, \\ T_1(0) = 1, \end{cases}$

3) $\forall\, k \neq 1,\, 2$:

$$\begin{cases} T_k{}'(t) + k^2 T_k(t) = 0, \quad t > 0, \\ T_k(0) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = 1 + t + \left(e^{x} - e^{x-t}\right)\sin x + e^{x-4t}\sin 2x.$

Домашнее задание

С. 153, № 41(3) (найти решения задач Коши 1)-3)).

Примерный вариант КР-3

Контрольная работа УМФ

Тема: **Решение краевой задачи для уравнения параболического типа**

Примерный вариант

Для смешанной краевой задачи, рассматриваемой в области $0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$:

$$u_t = 4u_{xx} - 4(t-1) + \cos 3\pi x + \tfrac{x^2}{2},$$
$$u_x(0,t) = 1, \quad u_x(1,t) = t,$$
$$u(x,0) = x - \tfrac{x^2}{2} + \cos \pi x.$$

1) постройте и решите соответствующую задачу Штурма-Лиувилля;

2) постройте решение методом Фурье.

Контрольная работа – 8 мая