Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

27.03.2024

Занятие № 8

Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

Гл. 5, § 4, с. 150: № 31 (1)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Ненулевое решение краевой задачи будем искать в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

Подставив (4) в уравнение (1) и разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Равенство должно выполняться при любых $x \in (0, l)$ и $t > 0$, что возможно, если оба отношения равны некоторой константе, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -c, \quad c = const, \tag{5}$$

Откуда получаем два дифференциальных уравнения с параметром c:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$T''(t) + ca^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \tag{7}$$

Подставляя (4) в граничные условия (2):

$$X'(0)T(t) = X'(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$

и, учитывая, что $T(t)$ не может быть тождественно равной 0, получим

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (6) и условия (8) дают соответствующую краевой задаче задачу Штурма-Лиувилля.

Решение задачи Ш-Л (см. Занятие № 5, № 23(г)):

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0,1,2,..., \quad \| X_n \|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Остается для каждого значения параметра $c = c_k$ найти общее решение уравнения (7). Оно имеет следующий вид:

$$T_k(t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t, & k = 0, \\ A_k \cos\dfrac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\dfrac{ak\pi t}{l}, & k \neq 0, \end{cases} \tag{9}$$

где A_k и B_k – произвольные $const$.

Согласно методу Фурье, решение заданного уравнения (1) запишем в виде ряда $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$:

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}. \tag{10}$$

Неизвестные константы A_k и B_k найдем, подчинив ряд (10) начальным условиям (3):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} = x, \\ u_t(x,0) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты A_k и B_k являются коэффициентами разложений функций x и 1 соответственно в ряды по собственным функциям задачи Ш-Л:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{l}{2}, \quad A_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{-4l}{(k\pi)^2}, & k = 2n-1, \end{cases}$$

$$n = 1,2,...., \quad B_0 = 1, \quad B_k = 0, \quad k = 1,2,....$$

Таким образом, решением задачи (1) – (3) является функция:

$$u(x,t)=\frac{l}{2}+t+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\left((-1)^k-1\right)}{k^2}\cos\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Ответ:

Выражение для $u(x,t)$ может быть записано и в следующем виде:

$$u(x,t)=\frac{l}{2}+t-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{a(2n-1)\pi t}{l}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}. \qquad (*)$$

Гл. 5, § 4, с. 152: № 38 (7)

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+Ae^{-t}\cos\tfrac{x}{2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0, \qquad (1)$$

$$u_x(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=4\sin\tfrac{3x}{2}\cdot\sin x,\quad 0\le x\le\pi. \qquad (3)$$

Будем искать решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x,t)=\sum_k T_k(t)X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x)=\cos\frac{(2k+1)x}{2}$ являются решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x)+cX(x)=0,\quad 0<x<\pi,$$
$$X'(0)=X(\pi)=0,$$

и, следовательно,

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{(2k+1)x}{2} \qquad (4)$$

Подставляя ряд (4) в (1) и объединяя два ряда в один, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k''(t)+\frac{a^2(2k+1)^2}{4}T_k(t)\right)\cos\frac{(2k+1)x}{2}=Ae^{-t}\cos\tfrac{x}{2}.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t)+\frac{a^2(2k+1)^2}{4}T_k(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}Ae^{-t}\cos\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{(2k+1)x}{2}\,dx=\begin{cases}Ae^{-t}, & k=0,\\ 0 & k\neq 0.\end{cases}$$

Подставляя ряд (4) в начальные условия (3), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cos\frac{(2k+1)x}{2}=0\ \Rightarrow\ T_k(0)=0\ \forall k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}T_k'(0)\cos\frac{(2k+1)x}{2}=4\sin\tfrac{3x}{2}\cdot\sin x=2(\cos\tfrac{x}{2}-\cos\tfrac{5x}{2})\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T_k'(0)=\begin{cases}2, & k=0,\\ -2, & k=2,\\ 0 & k\neq 0,2.\end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

1) $\begin{cases}T_0''(t)+\frac{a^2}{4}T_0(t)=Ae^{-t}, & t>0,\\ T_0(0)=0,\ \ T_0'(0)=2.\end{cases}$

2) $\begin{cases}T_2''(t)+\frac{25a^2}{4}T_2(t)=0, & t>0,\\ T_2(0)=0,\ \ T_2'(0)=-2.\end{cases}$

3) $\forall\ k\neq 0$, 2:

$$\begin{cases}T_k''(t)+\frac{a^2(2k+1)^2}{4}T_k(t)=0, & t>0,\\ T_k(0)=0,\ \ T_k'(0)=0.\end{cases}$$

Решив задачи Коши, найдем:

1) $T_0(t)=\frac{4A}{a^2+4}\left(e^{-t}-\cos\frac{at}{2}+\frac{2}{a}\sin\frac{at}{2}\right)+\frac{4}{a}\sin\frac{at}{2}$,

2) $T_2(t)=-\frac{4}{5a}\sin\frac{5at}{2}$,

3) $T_k(t)=0,\ \forall k\neq 0,2.$

Подставляя найденные выражения для $T_k(t)$ в (4), получим решение краевой задачи (1)–(3):

$$u(x,t)=\left(\frac{4A}{a^2+4}\left(e^{-t}-\cos\frac{at}{2}+\frac{2}{a}\sin\frac{at}{2}\right)+\frac{4}{a}\sin\frac{at}{2}\right)\cos\frac{x}{2}-\frac{4}{5a}\sin\frac{5at}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

Домашнее задание

1. Дать графическую иллюстрацию решения задачи № 31(1) – формула (*).
2. С. 150, № 31 (2),
3. Решите задачи 1)-3) (см. № 38(7)).

3.04.2024

Занятие № 9

Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа

Примерный вариант контрольного задания

В области $0 < x < \pi$, $t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 16u_x + 4u_t - 4(\cos t + 4) = e^{2x}\sin 5x - \sin t,$$

$$u(0,t) = \sin t, \qquad u(\pi,t) = \pi + \sin t,$$

$$u(x,0) = x + 2e^{2x}\cos x \sin 5x, \qquad u_t(x,0) = 1.$$

Решение задачи можно искать в виде:

$$u(x,t) = x + \sin t + w(x,t), \qquad (1)$$

(избавляемся от неоднородности в граничных условиях)

где $w(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$w_{tt} - 4w_{xx} + 16w_x + 4w_t = e^{2x}\sin 5x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \qquad (2)$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \qquad (3)$$

$$w(x,0) = 2e^{2x}\cos x \sin 5x, \qquad w_t(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi. \qquad (4)$$

Уравнение краевой задачи можно упростить, если искать его решение в виде

$$w(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}v(x,t),$$

определив коэффициенты α и β так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало ее производных по переменным x и t.
Так как

$$\begin{array}{r|l}
0 & w(x,t) = e^{\alpha x+\beta t} v(x,t), \\
16 & w_x = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v + v_x), \\
4 & w_t = e^{\alpha x+\beta t}(\beta v + v_t), \\
-4 & w_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\
1 & w_{tt} = e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}),
\end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l}
v & e^{\alpha x+\beta t}(16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2) \\
v_x & e^{\alpha x+\beta t}(16 - 8\alpha) \\
v_t & e^{\alpha x+\beta t}(4 + 2\beta) \\
v_{xx} & -4e^{\alpha x+\beta t} \\
v_{tt} & e^{\alpha x+\beta t}
\end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 16 - 8\alpha = 0, \\ 4 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -2, \end{cases}$$

(при этом $16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2 = 12$)

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} - 4v_{xx} + 12v = e^{2t}\sin 5x. \qquad (6)$$

А

$$w(x,t) = e^{2x-2t} v(x,t). \qquad (7)$$

Подставляя выражение (7) в условия (3) и (4), получим условия для функции $v(x, t)$:

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \qquad (8)$$

$$v(x,0) = 2\cos x \sin 5x, \qquad v_t(x,0) = 4\cos x \sin 5x, \qquad 0 \le x \le \pi. \qquad (9)$$

Будем искать решение краевой задачи (6), (8), (9) в виде ряда по собственным функциям:

$$v(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x) = \sin kx,\ k \in N$, являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$
$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

и, следовательно,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \qquad (10)$$

Подставляя ряд (10) в (6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + (4k^2 + 12) T_k(t) \right) \sin kx = e^{2t} \sin 5x.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + (4k^2 + 12) T_k(t) = \begin{cases} e^{2t}, & k = 5, \\ 0, & k \ne 5. \end{cases}$$

Подставляя ряд (10) в начальные условия (9), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin kx = 2\cos x \sin 5x = \sin 6x + \sin 4x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 4,6, \\ 0, & k \ne 4,6, \end{cases}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin kx = 4\cos x \sin 5x = 2\sin 6x + 2\sin 4x \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_k'(0) = \begin{cases} 2, & k = 4,6, \\ 0, & k \ne 4,6. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

4) $$\begin{cases} T_4''(t) + 76T_4(t) = 0, \quad t > 0, \\ T_4(0) = 1, \quad T_4'(0) = 2. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} T_5''(t) + 112T_5(t) = e^{2t}, \quad t > 0, \\ T_5(0) = 0, \quad T_5'(0) = 0. \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} T_6''(t) + 156T_6(t) = 0, \quad t > 0, \\ T_6(0) = 1, \quad T_6'(0) = 2. \end{cases}$$

7) $\forall\ k \neq$ 4,5,6:

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = 0, \quad t > 0, \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Задачи имеют следующие решения:

$$\left.\begin{aligned} &T_4(t) = \cos(\sqrt{76}t) + \frac{2}{\sqrt{76}}\sin(\sqrt{76}t); \\ &T_5(t) = \frac{1}{116}\left(e^{2t} - \cos(\sqrt{112}t) - \frac{2}{\sqrt{112}}\sin(\sqrt{112}t)\right); \\ &T_6(t) = \cos(\sqrt{156}t) + \frac{2}{\sqrt{156}}\sin(\sqrt{156}t); \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$T_n(t) = 0, \ \forall n \neq 4, 5, 6.$$

В результате будем иметь:

$$v(x,t) = T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x \quad \to \quad (8) \quad \to$$

$$w(x,t) = e^{2x-2t}v(x,t) = e^{2x-2t}(T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x) \ \to (1):$$

Ответ:

$$u(x,t) = x + \sin t + w(x,t) =$$
$$= x + \sin(t) + e^{2x-2t}(T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x),$$

где функции $T_4(t),\ T_5(t),\ T_6(t)$ определяются по формулам (11).

Замечание. Функцию $h(x, t)$, удовлетворяющую граничным условиям:

$$\begin{cases} \alpha_1 h_x(0,t) + \beta_1 h(0,t) = 0, \\ \alpha_2 h_x(l,t) + \beta_2 h(l,t) = 0, \end{cases}$$

можно найти в виде:

1) $h(x,t) = A(t)x + B(t)$, если $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$,
2) $h(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$, если $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Домашнее задание

Докажите утверждение, приведенное в **замечании**.

Домашняя контрольная работа не тему «**Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа**»
Срок выполнения: **17 апреля**

Варианты заданий