**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

**20.03.2024**

**Занятие № 7**

**Задача Штурма-Лиувилля**

При каких значениях параметра $c$ задача

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0, \\ a_i,\ b_i \in R, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{2}$$

имеет ненулевое решение.

Собственные значения задачи Ш-Л являются **вещественными**.

**Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (б):** $X'(0) = X(l) = 0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если с < 0 (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X(l) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если с = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \text{ и } X(l) = Al + B = 0.$$

Откуда получаем, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение.

3) Если c > 0 (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X(l) = A\cos(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\cos\lambda l = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, нашли собственные значения[1]:

$$c_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \; n \in N,$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \;\; \forall A_n \neq 0.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, отличаются на постоянный множитель.

Пусть $A_n = 1 \;\forall n \in N$. Тогда $\| X_n \|^2 = \int\limits_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2l}\, dx = \frac{l}{2}$.

**Ортогональность собственных функций.**

$$(X_k, X_n) = \int\limits_0^l \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\, dx =$$

---

[1] При отрицательных значениях $n$ не будут получены новые значения c.

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left( \cos\frac{(k+n+1)\pi x}{l} + \cos\frac{(k-n)\pi x}{l} \right) dx = 0 \quad \forall k \neq n.$$

**Вывод.** Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left( \frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad \| X_n \|^2 = \frac{l}{2}.$$

**Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (г):** $X'(0) = X'(l) = 0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если c < 0 (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X'(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = B, \\ B(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если c = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \;\text{ и }\; X'(l) = A = 0.$$

Получаем, что при c = 0 существует ненулевое решение $X(x) = B$, когда $B$ – $\forall$ const ≠ 0. Пусть $B = 1$.

$$c_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad \| X_0 \|^2 = \int_0^l 1\, dx = l.$$

3) Если c > 0 (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \;\Rightarrow\; B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X'(l) = A\lambda \sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin\lambda l = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda l = \pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, учитывая условие $\lambda \neq 0$, нашли собственные значения[2]:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \; n \in N,$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos\tfrac{n\pi x}{l}, \;\; \forall A_n \neq 0.$$

Пусть $A_n = 1 \;\forall n \in N$, тогда $\| X_n \|^2 = \int\limits_0^l \cos^2 \frac{n\pi\pi}{l}\,dx = \frac{l}{2}$.

**Вывод.** Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \;\; X_n(x) = \cos\tfrac{n\pi x}{l}, \;\; n = 0,1,2,..., \;\; \| X_n \|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

---

## Разложение функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

### Гл. 5, § 3, с. 132: № 25

**Разложение функции $f(x)$ в ряд по системе функций** $\sin\frac{n\pi x}{l}, \;\; n = 1, 2, \ldots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\tfrac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad f_n = \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$S(x,N) = \sum_{n=1}^{N} f_n \sin\tfrac{n\pi x}{l}, \quad f(x) = \lim_{N\to\infty} S(x,N).$$

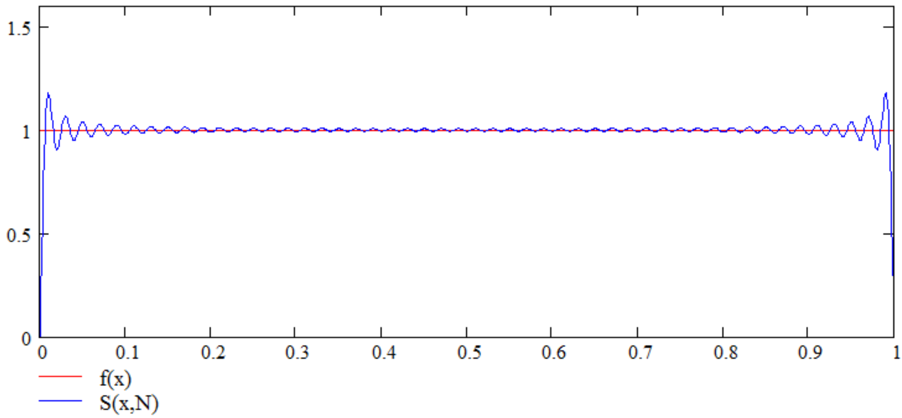
---

[2] При отрицательных значениях *n* не будут получены новые значения с.

1) $f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l).$$

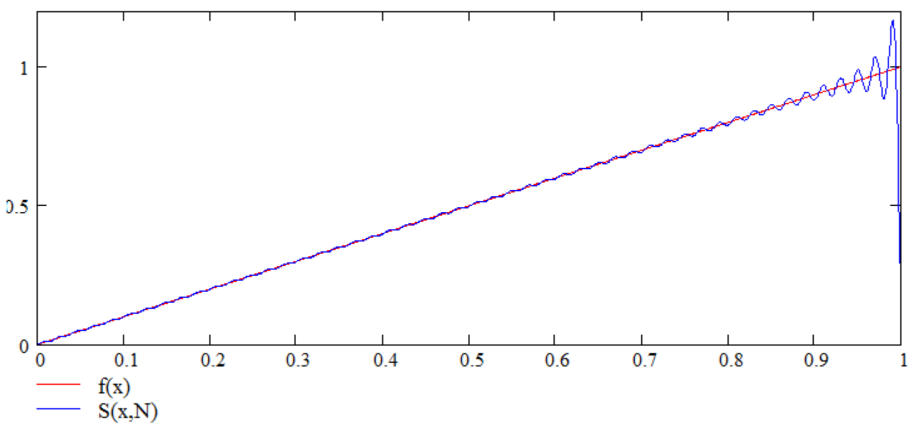
N = 99




2) $f(x) = x$

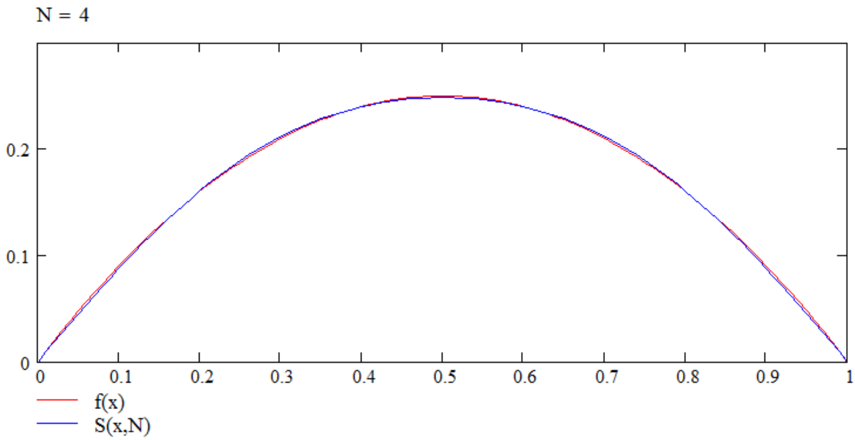
$$f(x) = \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [0, l).$$

N = 99



3) $f(x) = x(l - x)$

$$f(x) = \frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [1, l].$$




**Домашнее задание**

С. 127, Пример 1 – разбор решения;
с. 131, № **23** (в) ( + проверить свойство ортогональности собственных функций, вычислить нормы собственных функций),
с. 132, № **26**.