Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

06.03.2024

Занятие № 5

Консультация по домашнему заданию

№ 40 (5а). Найти решение уравнения

$$4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}\left(2u_x-u_y\right)=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0)=x^2,\;\; u_y(x,0)=.x.$

1) Определение типа уравнения:

$d=(1-y^2)^2+4y^2=(1+y^2)^2>0 \;\Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$4y^2(dy)^2-2(1-y^2)dydx-(dx)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;(dx)^2+2(1-y^2)dxdy-4y^2(dy)^2=0\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;(dx)^2+2(1-y^2)dxdy+(1-y^2)^2(dy)^2-(1-y^2)^2(dy)^2-4y^2(dy)^2=0\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(dx+(1-y^2)dy)^2-(1+y^2)^2(dy)^2=0\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\left[\begin{array}{l}dx-2y^2dy=0,\\ dx+2dy=0\end{array}\right.\;\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{2}{3}y^3=C_1,\\ x+2y=C_2.\end{array}\right.$$

Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad |x| < +\infty. \tag{2}$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{3}$$

Задача 1

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_x + 2u_t - 3u = e^{2x-t} x\sin t, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = e^{2x}\sin x, \quad u_t(x,0) = e^{2x}(\cos x - \sin x), \quad |x| < +\infty. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x,t) = e^{\alpha x+\beta t} v(x,t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t.

Так как

$$\begin{array}{r|l} - & u(x,t) = e^{\alpha x+\beta t} v(x,t), \\ 4 & u_x = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v + v_x), \\ 2 & u_t = e^{\alpha x+\beta t}(\beta v + v_t), \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -1 & u_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\ 1 & u_{tt} = e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}), \end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l} v & e^{\alpha x+\beta t}(-3+4\alpha+2\beta-\alpha^2+\beta^2) \\ v_x & e^{\alpha x+\beta t}(4-2\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x+\beta t}(2+2\beta) \\ v_{xx} & -e^{\alpha x+\beta t} \\ v_{tt} & e^{\alpha x+\beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 4-2\alpha=0, \\ 2+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2, \\ \beta=-1, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} = v_{xx} + x\sin t. \tag{6}$$

А

$$u(x,t) = e^{2x-t}v(x,t), \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} &v(x,0) = \sin x, \\ &v_t(x,0) = \cos x - \sin x + v(x,0) = \cos x. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера (при этом $a=1$):

$$v(x,t)=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos\xi d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\xi\sin\tau\, d\xi\, d\tau=$$

$$=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}+\frac{\sin(x+t)-\sin(x-t)}{2}=\sin(x+t).$$

Так как

$$\int_{x-t}^{x+t}\cos\xi d\xi=\sin(x-t)+\sin(x+t),$$

$$\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\xi\sin\tau\, d\xi\, d\tau=\int_0^t\left((x+t-\tau)^2-(x-t+\tau)^2\right)\sin\tau d\tau=$$

$$=4x\int_0^t(t-\tau)\sin\tau d\tau=4x(t-\sin t),$$

no получим

$$v(x,t)=\sin(x+t)+x(t-\sin t).$$

Подставив полученное выражение для $v(x,t)$ в (7), найдем решение задачи (4)-(5):

$$\boxed{u(x,t)=e^{2x-t}(\sin(x+t)+x(t-\sin t)).}$$

Гл. 5, § 2, с. 124: № 17 (в)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x,t)\equiv 0$):

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$-периодические функции, то

$$u(0,t)=u(l,t)=0.$$

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

$$1)\quad u(0,t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{-\varphi(at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=0.$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

$$2)\quad u(l,t)=\frac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

По свойствам нечетности и $2l$-периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at)=-\varphi(-l+at)=-\varphi(-l+at+2l)=-\varphi(l+at)\,.$$

Разбив интеграл на два:

$$\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi=\int_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi+\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и $2l$-периодичности функции ψ:

$$\int_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi=\left[\xi=-\eta\right]=-\int_{-l+at}^{-l}\psi(-\eta)d\xi=\int_{-l+at}^{-l}\psi(\eta)d\eta=\int_{-l+at}^{-l}\psi(\eta+2l)d\eta=$$

$$=\left[\xi=\eta+2l\right]=\int_{l+at}^{l}\psi(\xi)d\xi=-\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

Таим образом, получаем:

$$u(l,t)=\frac{-\varphi(l+at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(-\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi+\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi\right)=0.$$

Домашнее задание

С. 123-124: № 13(3), № 18.