Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

21.02.2024

Занятие № 3

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Общая схема преобразования уравнения

$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x.u_y)$		
Тип уравнения		
$B^2-AC>0$	$B^2-AC=0$	$B^2-AC<0$
гиперболический	параболический	эллиптический
Уравнение характеристик		
$A(dy)^2-2Bdydx+C(dx)^2=0$		
Первые интегралы уравнения характеристик (семейства характеристик)		
$\varphi(x,y)=C_1,$ $\psi(x,y)=C_2$	$\varphi(x,y)=C$	$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,$ $\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$
Замена		
$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$	$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases}$ $J\neq 0$	$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$
$u(x,y)=v(\xi,\eta),$ $u_x=v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x,$ $u_y=v_\xi\xi_y+v_\eta\eta_y,$ $u_{xx}=v_{\xi\xi}(\xi_x)^2+2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+v_{\eta\eta}(\eta_x)^2+v_\xi\xi_{xx}+v_\eta\eta_{xx},$ $u_{yy}=v_{\xi\xi}(\xi_y)^2+2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+v_{\eta\eta}(\eta_y)^2+v_\xi\xi_{yy}+v_\eta\eta_{yy},$ $u_{xy}=v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+v_\xi\xi_{xy}+v_\eta\eta_{xy}$		

Канонический вид		
$v_{\xi\eta}=\Phi$	$v_{\eta\eta}=\Phi$	$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=\Phi$
где $\Phi=\Phi(\xi,\eta,v,v_{\xi},v_{\eta})$		

Гл. 2, § 5, с. 75-76: № 33 (1), № 34 (1)

№ 33 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+u+x=0.$$

Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости.

1) Определение типа уравнения:

   $d=1>0 \;\Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип в любой точке плоскости.

2) Решение уравнения характеристик:

$$-2dydx-4(dx)^2=0 \Leftrightarrow dx(dy+2dx)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx=0, \\ dy+2dx=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=C_1, \\ y+2x=C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=x, \quad \eta=y+2x, \quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$
$$u(x,y)=v(x,y+2x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 1 & u_x=v_{\xi}+2v_{\eta} \\ -2 & u_y=v_{\eta} \\ -4 & u_{yy}=v_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy}=v_{\xi\eta}+2v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения. Подстановка построенных выражений в заданное уравнение дает:

$$\boxed{2v_{\xi\eta}+v_{\xi}+v+\xi=0 \quad\Leftrightarrow\quad v_{\xi\eta}+\tfrac{1}{2}v_{\xi}+\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}\xi=0.}$$

№ 34 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} + (2-\cos^2 x)\cdot u_{yy} = 0.$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких x и y, при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).

2) Определение типа уравнения:

   $d = \sin^2 x - (2-\cos^2 x) = -1 \;\Rightarrow\;$ уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.

3) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2\sin x \cdot dydx + (2-\cos^2 x)(dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy + \sin x \cdot dx)^2 + (dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy + \sin x dx + idx)(dy + \sin x dx - idx) = 0.$$

   Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y - \cos x + ix = C_1, \quad y - \cos x - ix = C_2.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x, \quad \eta = x, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta).$$
$$u(x,y) = v(y-\cos x, x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

0	$u_x = \sin x \cdot v_\xi + v_\eta$
0	$u_y = v_\xi$
1	$u_{xx} = \sin^2 x \cdot v_{\xi\xi} + 2\sin x \cdot v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + \cos x \cdot v_\xi$
$2-\cos^2 x$	$u_{yy} = v_{\xi\xi}$
$-2\sin x$	$u_{xy} = \sin x \cdot v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2\sin^2 x = 1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2\sin x - 2\sin x = 0$	

v_ξ	$\cos x$	$\cos\eta$
v_η	0	

Канонический вид: $\boxed{v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \cos\eta \cdot v_\xi = 0.}$

Домашнее задание

Гл. 2, §3 с. 65: № 17(1, 6); §5 с. 75-76: № 33 (3), 34 (2).

Задание для самостоятельной работы

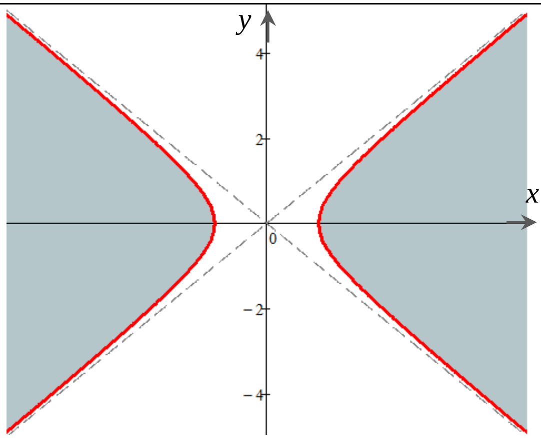
№ 35 (1). Области параболичности, гиперболичности и эллиптичности уравнения: $(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1+y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0.$

Дискриминант уравнения:

$$d = (xy)^2 + (1-x^2)(1+y^2) = 1 - x^2 + y^2.$$

Области, где сохранятся тип уравнения, описывают условия:

Область параболичности	Область гиперболичности	Область эллиптичности
$1 - x^2 + y^2 = 0$	$1 - x^2 + y^2 > 0$	$1 - x^2 + y^2 < 0$
Уравнение $1 - x^2 + y^2 = 0$ на координатной плоскости Oxy определяет **гиперболу**, которая является границей областей		



	Между ветвями гиперболы	

28.02.2024

Занятие № 4

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

№ 40 (2). Найти решение уравнения

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0) = 2x, \quad u_y(x,0) = 1.$

1) Определение типа уравнения:

$$d = 4 + 5 = 9 > 0 \;\Rightarrow$$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 - 4dydx - 5(dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (dy - 2dx)^2 - 9(dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy - 5dx = 0, \\ dy + dx = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 5x = C_1, \\ y + x = C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - 5x, \quad \eta = y + x, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y) = v(y-5x.y+x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 1 & u_x = -5v_\xi + v_\eta \\ -1 & u_y = v_\xi + v_\eta \\ 1 & u_{xx} = 25v_{\xi\xi} - 10v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ -5 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ 4 & u_{xy} = -5v_{\xi\xi} - 4v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η
0	0	–36	–6	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{6}v_\xi = 0. \tag{2}$$

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta} + \tfrac{1}{6}v_\xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_\xi = w, \\ w_\eta + \tfrac{1}{6}w = 0. \end{cases}$$

$$w_\eta + \tfrac{1}{6}w = 0, \qquad w(\xi,\eta) = C(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta},$$

$$v_\xi = C(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta}, \quad v(\xi,\eta) = \Phi(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta} + \mathrm{F}(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = \Phi(y-5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)} + \mathrm{F}(y+x). \tag{3}$$

8) *Построение частного решения*

Найдем производную:

$$u_y(x,y) = \Phi'(y-5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)} - \frac{1}{6}\Phi(y-5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)} + F'(y+x).$$

Подставляя (3) в заданные условия $u(x,0)=2x,\ \ u_y(x,0)=1,$ получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(x,0)=\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+F(x)=2x, \\ u_y(x,0)=\Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}-\frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+F'(x)=1. \end{cases}$$

Решение системы (методом подстановки)

$$\begin{cases} F(x)=2x-\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}, \\ \Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}-\frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+2+5\Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}+\frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}=1 \end{cases}$$

$$6\Phi'(-5x)e^{-\frac{x}{6}}=-1,\ \ \Phi'(-5x)=-\frac{1}{6}e^{\frac{x}{6}},\ \ \Phi'(t)=-\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{30}},$$

$$\Phi(t)=5e^{-\frac{t}{30}}+C,\quad C-const.$$

Подставляя полученное выражение для Φ в первое уравнение системы, найдем

$$F(x)=2x-5-Ce^{-\frac{x}{6}}.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y)=2(y+x)-5+5e^{-\frac{1}{5}y}.}$$

№ 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y-4)u_{xx}-2\sin y\cdot u_{xy}+u_{yy}-\cos y\cdot u_x=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(\cos y,y)=\cos y,\ \ u_x(\cos y,y)=\sin y.$

1) Определение типа уравнения:

   $d=\sin^2 y-(\sin^2 y-4)=4>0 \ \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(\sin^2 y-4)(dy)^2+2\sin y dy dx+(dx)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dx+\sin y dy)^2-4(dy)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx+(\sin y-2)dy=0, \\ dx+(\sin y+2)dy=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\cos y-2y=C_1, \\ x-\cos y+2y=C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=x-\cos y-2y, \quad \eta=x-\cos y+2y, \quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$
$$u(x,y)=v(x-\cos y-2y, x-\cos y+2y).$$

4) Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
-\cos y & u_x=v_\xi+v_\eta \\
0 & u_y=(\sin y-2)v_\xi+(\sin y+2)v_\eta \\
(\sin^2 y-4) & u_{xx}=v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \\
1 & u_{yy}=(\sin y-2)^2 v_{\xi\xi}+2(\sin^2 y-4)v_{\xi\eta}+(\sin y+2)^2 v_{\eta\eta}+ \\
 & \quad +\cos y\cdot v_\xi+\cos y\cdot v_\eta \\
-2\sin y & u_{xy}=(\sin y-2)v_{\xi\xi}+2\sin y\cdot v_{\xi\eta}+(\sin y+2)v_{\eta\eta}
\end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y-4+(\sin y-2)^2-2\sin y(\sin y-2)=0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y-4+(\sin y+2)^2-2\sin y(\sin y+2)=0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y-4)+2(\sin^2 y-4)-4\sin^2 y=-16$
v_ξ	$-\cos y+\cos y=0$
v_η	$-\cos y+\cos y=0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta}=0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi,\eta)=\Phi(\xi)+\Psi(\eta). \qquad (2)$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = \Phi(x - \cos y - 2y) + \Psi(x - \cos y + 2y). \qquad (3)$$

8) *Построение частного решения*

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(\cos y, y) = \Phi(-2y) + F(2y) = \cos y, \\ u_x(\cos y, y) = \Phi'(-2y) + F'(2y) = \sin y. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y) + 2F'(2y) = -\sin y \quad \Rightarrow \quad \Phi'(-2y) = \tfrac{1}{2}\sin y + F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\tfrac{1}{2}\sin y + F'(2y) + F'(2y) = \sin y \Rightarrow \quad F'(2y) = \tfrac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t) = \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{t}{2}, \quad F(t) = -\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2} + C, \quad C - const.$$

Найденное выражение для функции F подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y) - \tfrac{1}{2}\cos y + C = \cos y \quad \Rightarrow \quad \Phi(-2y) = \tfrac{3}{2}\cos y - C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t) = \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{t}{2} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y) = \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{x - \cos y - 2y}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{x - \cos y + 2y}{2}.}$$

Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (1, 5а).

Консультация по домашнему заданию

№ 40 (5а). Найти решение уравнения

$$4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}\left(2u_x-u_y\right)=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0)=x^2,\quad u_y(x,0)=.x.$

1) Определение типа уравнения:

$d=(1-y^2)^2+4y^2=(1+y^2)^2>0 \;\Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$4y^2(dy)^2-2(1-y^2)dydx-(dx)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (dx)^2+2(1-y^2)dxdy-4y^2(dy)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (dx)^2+2(1-y^2)dxdy+(1-y^2)^2(dy)^2-(1-y^2)^2(dy)^2-4y^2(dy)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dx+(1-y^2)dy)^2-(1+y^2)^2(dy)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx-2y^2dy=0,\\ dx+2dy=0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\tfrac{2}{3}y^3=C_1,\\ x+2y=C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=x-\tfrac{2}{3}y^3,\quad \eta=x+2y,\quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y)=v(x-\tfrac{2}{3}y^3,x+2y).$$

4) Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} -\frac{4y}{1+y^2} & u_x=v_\xi+v_\eta \\[2ex] \frac{2y}{1+y^2} & u_y=-2y^2v_\xi+2v_\eta \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
4y^2 & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
-1 & u_{yy} = 4y^4 v_{\xi\xi} - 8y^2 v_{\xi\eta} + 4v_{\eta\eta} - 4yv_{\xi}, \\
2(1-y^2) & u_{xy} = -2y^2 v_{\xi\xi} + 2(1-y^2)\cdot v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta}
\end{array}
$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$4y^2 - 4y^4 - 4y^2(1-y^4) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$4y^2 - 4 + 4(1-y^2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$8y^2 + 8y^2 + 4(1-y^2)^2 = 4(1+y^2)^2$
v_{ξ}	$-\frac{4y}{1+y^2} - \frac{4y^3}{1+y^2} + 4y = 0$
v_{η}	$-\frac{4y}{1+y^2} + \frac{4y}{1+y^2} = 0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta). \tag{2}$$

7) Возвращаясь к старым переменным *x*, *y*, *u*, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = \Phi(x - \tfrac{2}{3}y^3) + \Psi(x + 2y). \tag{3}$$

9) *<u>Построение частного решения</u>*

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = x,$$

получим систему для нахождения функций Ψ и Φ:

$$\begin{cases} u(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x) = x^2, \\ u_y(x,0) = 2\Psi'(x) = x, \end{cases} \tag{4}$$

решая которую, найдем

$$\Psi(x)=\frac{x^2}{4}+C,\quad \Phi(x)=\frac{3x^2}{4}-C,\quad C-\forall const.$$

Найденные выражения для функций Ψ и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y)=\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}y^3\right)^2+\frac{1}{4}\left(x+2y\right)^2.}$$