



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---

**09.04.26**

## **Занятие № 10**

### **Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности**

Краевая задача, описывающая распространение тепла в однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, когда на концах стержня происходит теплообмен со средой с заданной температурой (пусть  $A$  – температура окружающей среды с торцевого сечения  $x = 0$ , а  $B$  – с торцевого сечения  $x = l$ ):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - h(u(0, t) - A) = u_x(l, 0) + h(u(l, t) - B) = 0, \quad t \geq 0, \\ h = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Решение задачи будем искать в виде суммы:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t), \quad (4)$$

где функция  $v(x)$  удовлетворяет неоднородным граничным условиям:

$$\begin{cases} v'(0) - hv(0) = -Ah, \\ v'(l) + hv(l) = Bh. \end{cases} \quad (5)$$

Функция, удовлетворяющая условиям (5), может быть найдена в виде:

$$v(x) = \alpha x + \beta, \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим систему линейных уравнений, решая которую найдем:

$$\alpha = \frac{h(B-A)}{2+hl}, \quad \beta = \frac{B+A+Ah}{2+hl}. \quad (7)$$

Зная  $v(x)$ , построим краевую задачу для определения функции  $w(x,t)$ . Подставив (4) в (1)–(3), получим:

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$w_x(0,t) - hw(0,t) = w_x(l,t) + hw(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$w(x,0) = \varphi(x) - \alpha x - \beta, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (10)$$

Будем искать решение краевой задачи (8)–(10) в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x), \quad (11)$$

где собственные функции  $X_k(x)$  являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (Ш-Л):

$$\begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Для нахождения всех значений параметра  $c$ , при которых задача (12) имеет ненулевое решение, рассмотрим три случая:

1) Если  $c = 0$ , то общее решение уравнения задачи Ш-Л (12):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = A - hB = 0, \\ X'(l) + hX(l) = A + h(Al + B) = 0. \end{cases}$$

Для определителя матрицы системы имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -h \\ 1+hl & h \end{vmatrix} = h(2 + hl) \neq 0.$$

Следовательно, что  $A = B = 0$ . А значит, и в этом случае получаем нулевое решение задачи (12).

**Вывод: собственные значения задачи Ш-Л (12) не могут быть равным 0.**

2) Если  $c < 0$  (пусть  $c = -\lambda^2$ ,  $\lambda \neq 0$ ), то общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda(A - B) - h(A + B) = 0, \\ X'(l) + hX(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) + h(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\lambda - h) - B(\lambda + h) = 0, \\ A(\lambda + h)e^{\lambda l} - B(\lambda - h)e^{-\lambda l} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Полученная система (13) имеет ненулевое решение  $(A, B)$ , если определитель матрицы системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda - h & -(\lambda + h) \\ (\lambda + h)e^{\lambda l} & -(\lambda - h)e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + h^2)(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) + 2\lambda h(e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) не имеет вещественных корней, отличных от 0, так как при  $\lambda < 0$  левая часть уравнения меньше 0, а при  $\lambda > 0$  – положительна. Значит, определитель матрицы системы (13) отличен от 0 при любых  $\lambda \neq 0$ , и система (13) имеет нулевое решение  $A = B = 0$ . Следовательно, задача (12) имеет только нулевое решение.

**Вывод: собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л (12) не могут быть отрицательными.**

3) Если  $c > 0$  (пусть  $c = \lambda^2$ ,  $\lambda \neq 0$ ), то общее решение уравнения (12):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничным условиям задачи (12). Будем иметь:

$$\begin{cases} \lambda B - hA = 0, \\ \lambda(-A \sin \lambda l + B \cos \lambda l) + h(A \cos \lambda l + B \sin \lambda l) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Выясним, существуют ли такие  $\lambda \neq 0$ , при которых определитель матрицы системы (15) равен 0:

$$\begin{vmatrix} -h & \lambda \\ -\lambda \sin \lambda l + h \cos \lambda l & \lambda \cos \lambda l + h \sin \lambda l \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - h^2) \sin \lambda l - 2\lambda h \cos \lambda l = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2\lambda h} \quad (16)$$

Заметим, что, если  $\lambda^*$  является корнем уравнения (16), то и  $(-\lambda^*)$  также является его корнем. Тогда, так как  $c = \lambda^2$ ,  $\lambda \neq 0$ , то для нахождения собственных значений следует выяснить, сколько положительных корней имеет уравнение (16). Графическое решение уравнения (16) (см. рис. 1) позволяет сделать следующий вывод: *суще-*

стает бесконечное счетное множество положительных корней уравнения (16)  $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$ .

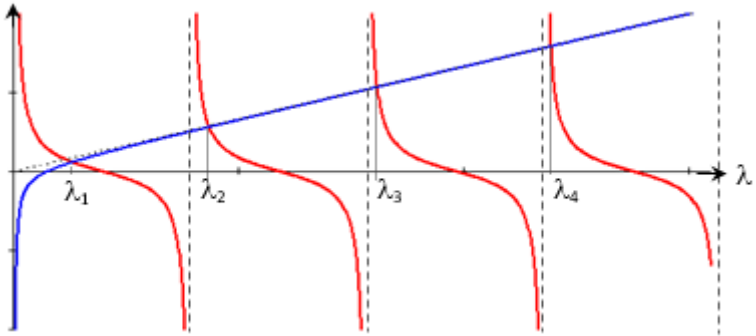


Рис. 1. Графическое решение уравнения (16)

Для каждого  $\lambda = \lambda_k$  система (15) имеет ненулевое решение  $(A_k, B_k)$ , для которого

$$A_k = \frac{\lambda_k}{h} B_k, \quad \forall B_k \neq 0.$$

Следовательно, собственные значения задачи Ш-Л (12):

$$c_k = \lambda_k^2,$$

где  $\lambda_k$  — положительные корни уравнения (16), и соответствующие им собственные функции:

$$X_k(x) = \frac{\lambda_k}{h} B_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x, \quad \forall B_k \neq 0.$$

Пусть  $B_k = h \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Вывод:** Задача Ш-Л имеет решение:

$$X_k(x) = \lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где  $\lambda_k$  – положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \quad (18)$$



### Домашнее задание

- 1) Найти  $\|X_k(x)\|^2$  для собственных функций (17). Полученное выражение преобразуйте к виду, не содержащему тригонометрических функций.

$$\text{Ответ: } \|X_k(x)\|^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k^2)}{2} + h.$$

- 2) Покажите ортогональность собственных функций на отрезке  $[0, l]$ , соответствующих различным собственным значениям.

**Найдем квадрат нормы собственной функции:**

$$\begin{aligned} \|X_k(x)\|^2 &= \int_0^l X_k^2(x) dx = \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x)^2 dx = \\ &= \int_0^l (\lambda_k^2 \cos^2 \lambda_k x + 2h\lambda_k \cos \lambda_k x \cdot \sin \lambda_k x + h^2 \sin^2 \lambda_k x) dx = \\ &= \int_0^l \left( \lambda_k^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\lambda_k x}{2} + h\lambda_k \sin 2\lambda_k x + h^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\lambda_k x}{2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \left( \frac{\lambda_k^2 + h^2}{2} + \frac{\lambda_k^2 - h^2}{2} \cos 2\lambda_k x + h\lambda_k \sin 2\lambda_k x \right) dx = \\
&= \frac{(\lambda_k^2 + h^2)l}{2} + \frac{\lambda_k^2 - h^2}{4\lambda_k} \sin 2\lambda_k l - \frac{h}{2} (\cos 2\lambda_k l - 1).
\end{aligned}$$

**16.04.2026**

## Занятие № 11

Подставляя ряд (11) в (8) и (10), получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} (T_k'(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t)) X_k(x) = 0, \\
&\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \varphi(x) - \beta x - \beta = \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

Тогда функции  $T_k(x)$  являются решениями следующих задач Коши:

$$T_k'(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) = 0, \quad T_k(0) = \gamma_k, \quad t > 0, \quad k \in N, \quad (19)$$

где

$$\gamma_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} \int_0^l \varphi_1(\xi) X_k(\xi) d\xi, \quad k \in N. \quad (20)$$

Задачи Коши (19) имеют решения:

$$T_k(t) = \gamma_k e^{-(a\lambda_k)^2 t}, \quad k \in N. \quad (21)$$

Подставив (17) и (21) в (11), получим решение задачи (8)-(10):

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-(a\lambda_k)^2 t} (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x). \quad (22)$$

*Замечание.* **Фундаментальным решением** задачи (8)-(10) (функцией Грина) является функция:

$$G(x, \xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} e^{-(a\lambda_k)^2 t} X_k(x) X_k(\xi).$$

**Вывод:** задача (1)–(3) имеет решение

$$u(x, t) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x),$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_k$  определяются по формулам (7) и (20).

### Гл. 5, § 4, с. 153: № 41 (3)

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = t + 1, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 1 + e^x \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

С помощью преобразований:

$$1) \quad u(x, t) = t + 1 + w(x, t), \quad (4)$$

$$2) \quad w(x, t) = e^x z(x, t),$$

решение исходной краевой задачи сводится к решению следующей:

$$z_t - z_{xx} = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$z(0, t) = z(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$z(x, 0) = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Решение задачи (5) ищется в виде:

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \quad (6)$$

В (6) функции  $\sin kx$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , являются решением задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} X''(x) + cX(x) &= 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) &= X(\pi) = 0. \end{aligned}$$

После подстановки ряда (6) в уравнение и начальные условия задачи (5) получим следующие задачи Коши:

$$1) \begin{cases} T_1'(t) + T_1(t) = 1, & t > 0, \\ T_1(0) = 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} T_2'(t) + 4T_2(t) = 0, & t > 0, \\ T_2(0) = 1, \end{cases}$$

3)  $\forall k \neq 1, 2$ :

$$\begin{cases} T_k'(t) + k^2 T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $u(x, t) = 1 + t + (e^x - e^{x-t}) \sin x + e^{x-4t} \sin 2x$ .



### Домашнее задание

С. 153, № 41(3) (найти решения задач Коши 1)-3)).

[Примерный вариант КР-3](#)