



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

05.03.2026

Занятие № 5

Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad |x| < +\infty. \quad (2)$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3)$$

Задача 1

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_x + 2u_t - 3u = e^{2x-t} x \sin t, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = e^{2x} \sin x, \quad u_t(x, 0) = e^{2x} (\cos x - \sin x), \quad |x| < +\infty. \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t .

Так как

$$\begin{array}{l|l} - & u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t), \\ 4 & u_x = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha v + v_x), \\ 2 & u_t = e^{\alpha x + \beta t} (\beta v + v_t), \\ -1 & u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\ 1 & u_{tt} = e^{\alpha x + \beta t} (\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}), \end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{l|l} v & e^{\alpha x + \beta t} (-3 + 4\alpha + 2\beta - \alpha^2 + \beta^2) \\ v_x & e^{\alpha x + \beta t} (4 - 2\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x + \beta t} (2 + 2\beta) \\ v_{xx} & -e^{\alpha x + \beta t} \\ v_{tt} & e^{\alpha x + \beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 4 - 2\alpha = 0, \\ 2 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -1, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} = v_{xx} + x \sin t. \quad (6)$$

А

$$u(x,t) = e^{2x-t} v(x,t), \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \sin x, \\ v_t(x, 0) &= \cos x - \sin x + v(x, 0) = \cos x. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера (при этом $a = 1$):

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos \xi d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \xi \sin \tau d\xi d\tau = \\ &= \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{\sin(x+t) - \sin(x-t)}{2} = \sin(x+t). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{x-t}^{x+t} \cos \xi d\xi = \sin(x-t) + \sin(x+t),$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \xi \sin \tau d\xi d\tau &= \int_0^t \left((x+t-\tau)^2 - (x-t+\tau)^2 \right) \sin \tau d\tau = \\ &= 4x \int_0^t (t-\tau) \sin \tau d\tau = 4x(t - \sin t), \end{aligned}$$

по получим

$$v(x, t) = \sin(x+t) + x(t - \sin t).$$

Подставив полученное выражение для $v(x, t)$ в (7), найдем решение задачи (4)-(5):

$$u(x, t) = e^{2x-t} (\sin(x+t) + x(t - \sin t)).$$

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x, t) \equiv 0$):

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$ -периодические функции, то
 $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

$$\begin{aligned}
 1) \quad u(0, t) &= \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{-\varphi(at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0.
 \end{aligned}$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

$$2) \quad u(l, t) = \frac{\varphi(l-at) + \varphi(l+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{l-at}^{l+at} \psi(\xi) d\xi.$$

По свойствам нечетности и $2l$ -периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at) = -\varphi(-l+at) = -\varphi(-l+at+2l) = -\varphi(l+at).$$

Разбив интеграл на два:

$$\int_{l-at}^{l+at} \psi(\xi) d\xi = \int_{l-at}^l \psi(\xi) d\xi + \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и $2l$ -периодичности функции ψ :

$$\int_{l-at}^l \psi(\xi) d\xi = [\xi = -\eta] = - \int_{-l+at}^{-l} \psi(-\eta) d\xi = \int_{-l+at}^{-l} \psi(\eta) d\eta = \int_{-l+at}^{-l} \psi(\eta + 2l) d\eta =$$

$$= [\xi = \eta + 2l] = \int_{l+at}^l \psi(\xi) d\xi = - \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi.$$

Таким образом, получаем:

$$u(l, t) = \frac{-\varphi(l+at) + \varphi(l+at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(- \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi + \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi \right) = 0.$$

Гл. 5, § 2, с. 123: № 15

[Иллюстративный материал](#) на сайте дисциплины



Домашнее задание

С. 123-124: № 13(3), № 18.

Контрольная работа – 12.03.26

Решить [примерный вариант контрольной работы](#)