Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

12.02.2026

Занятие № 2. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения методом характеристик.

Гл. 2, § 3, с. 64

Построить общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду в указанной области изменения независимых переменных, считая $u = u(x, y)$.

№ 14 (1). $yu_x - xu_y = 0, \ \ x \neq 0, \ y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$
2) Решая уравнение характеристик методом разделения переменных, найдем его первый интеграл $x^2 + y^2 = C.$
3) Введем новые переменные:
$$\begin{cases} \xi = x^2 + y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$
Так как $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v\left(\xi(x, y), \eta(x, y)\right)$ найдем:
$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = 2yv_\xi.$$
После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:
$$yv_\eta = 0 \ \ \to \ \ v_\eta = 0.$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = 0 \quad \to \quad v(\xi,\eta) = C(\xi),$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x,y) = C(x^2+y^2),}$$

где C($\cdot$) – произвольная дифференцируемая функция.

№ 14 (7). $\frac{1}{x}u_x + \frac{1}{y}u_y = \frac{u}{y^2}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1/x} = \frac{dy}{1/y} \quad \Leftrightarrow \quad xdx - ydy = 0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x^2 - y^2 = C.$

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$\frac{1}{x}v_\eta = \frac{v}{y^2} \quad \to \quad v_\eta = \frac{xv}{y^2} \xrightarrow{x=\eta,\ y^2=\eta^2-\xi} v_\eta = \frac{\eta v}{\eta^2-\xi}.$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = \frac{\eta v}{\eta^2 - \xi} \quad \to \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \xi} + \ln|C(\xi)| \quad \to$$

$$\to \quad \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|\eta^2 - \xi| + \ln|C(\xi)| \quad \to \quad v(\xi,\eta) = C(\xi)\sqrt{|\eta^2 - \xi|},$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x,y) = v(x^2 - y^2, x) = C(x^2 - y^2)\sqrt{|x^2 - (x^2 - y^2)|} =$$

$$= C(x^2 - y^2)\sqrt{y^2} = |y|C(x^2 - y^2).$$

Учитывая произвольность функции C(·), общее решение заданного уравнения можно записать следующим образом:

$$\boxed{u(x,y) = yC(x^2 - y^2).}$$

Замечание. Для сравнения приведём преобразование уравнения при введение новых переменных следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = y. \end{cases}$$

Так как для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi + v_\eta,$$

то после подстановки выражений для производных в заданное уравнение получим:

$$\frac{1}{y}v_\eta = \frac{v}{y^2} \quad \to \quad v_\eta = \frac{v}{y} \quad \xrightarrow{y=\eta} \quad v_\eta = \frac{v}{\eta}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = \frac{v}{\eta} \quad \to \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{d\eta}{\eta} + \ln|C(\xi)| \quad \to$$

$$\to \quad \ln|v| = \ln|\eta| + \ln|C(\xi)| \quad \to \quad v(\xi,\eta) = C(\xi)\eta,$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x,y)=v(x^2-y^2,y)=yC(x^2-y^2).$$

№ 13 (1): Принимая ξ и η за новые переменные, преобразовать уравнение $xu_x+\sqrt{1+y^2}\cdot u_y=xy$, если $\xi=\ln x$, $\eta=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$ в области $x>0$.

Построим выражения для производных функции $u(x,y)$ при переходе к новым переменным $u(x,y)=v\left(\xi(x,y),\eta(x,y)\right)$:

$$u_x=v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x=\frac{1}{x}v_\xi,$$

$$u_y=v_\xi\xi_y+v_\eta\eta_y=\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\cdot\left(1+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)v_\eta=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}v_\eta.$$

Подставив выражения для производных в уравнение

$$xu_x+\sqrt{1+y^2}\cdot u_y=xy,$$

учитывая связь между старыми и новыми переменными:

$$\begin{cases}\xi=\ln x,\\ \eta=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^\xi,\\ y=\dfrac{e^\eta-e^{-\eta}}{2}=\operatorname{sh}\eta\end{cases}$$

получим: $\boxed{v_\xi+v_\eta=e^\xi\operatorname{sh}\eta.}$

Построить общее решение уравнения:

$$u_x+u_y=e^x\operatorname{sh}y \qquad (*)$$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}\Leftrightarrow dx-dy=0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x-y=C$.

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x - y, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -v_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$v_\eta = e^x \operatorname{sh} y \xrightarrow{x=\eta,\ y=\eta-\xi} v_\eta = e^\eta \operatorname{sh}(\eta - \xi).$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = e^\eta \operatorname{sh}(\eta-\xi) \quad \to \quad v(\xi,\eta) = \int e^\eta \operatorname{sh}(\eta-\xi)\,d\eta \ + C(\xi).$$

Так как

$$\int e^\eta \operatorname{sh}(\eta-\xi)\,d\eta \ = \frac{1}{2}\int\left(e^{2\eta-\xi} - e^\xi\right)d\eta = \frac{1}{4}e^{2\eta-\xi} - \frac{1}{2}\eta e^\xi,$$

то получим

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{4}e^{2\eta-\xi} - \frac{1}{2}\eta e^\xi + C(\xi).$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x,y) = v(x-y,x) = \frac{1}{4}e^{x+y} - \frac{1}{2}xe^{x-y} + C(x-y).}$$

Дополнение

Зная решение уравнения (*), запишем решение уравнения из **№ 13 (1):**

$$v(\xi,\eta)=\frac{1}{4}e^{\xi+\eta}-\frac{1}{2}\xi e^{\xi-\eta}+C(\xi-\eta),$$

$$u(x,y)=v\left(\ln x,\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right)=\frac{1}{4}x\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{x\ln x}{y+\sqrt{y^2+1}}+C\left(\ln\frac{x}{y+\sqrt{y^2+1}}\right),\quad x>0.$$

Домашнее задание

С. 64: №№ 12, 13(2), 14 (2, 4).