



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---



Занятие № 17

**21.05.2026**

## **Занятие № 16. Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье**

### **Задача Дирихле**

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (1)$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(a, y) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3)$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (5)$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \quad (6)$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \quad (7)$$

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad \|Y_k(y)\|^2 = \frac{b}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для каждого значения параметра  $c = c_k$  общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (8)$$

Произвольные постоянные  $A_k$  и  $B_k$  найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{k\pi y}{b} = \mu(y),$$

$$u(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b} = \nu(y).$$

Разложив функции  $\mu(y)$  и  $\nu(y)$  в ряд по собственным  $Y_k(y)$ , получим:

$$\begin{cases} A_k + B_k = \frac{2}{b} \int_0^b \mu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} = \frac{2}{b} \int_0^b \nu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \nu_k, \end{cases} \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{v_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - v_k}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставив полученные выражения для  $A_k$  и  $B_k$  в ряд (8), получим

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + \mu_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}.$$

**Задача Неймана** для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, & u_y(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, b) = g(x). \end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{1}$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (1) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\|X_k(x)\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра  $c = c_k$  общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} \right) \cos\frac{k\pi x}{a}. \quad (8)$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при  $y = 0$  и  $y = b$ . Будем иметь:

$$u_y(x, 0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} (A_k - B_k) \cos\frac{k\pi x}{a} = f(x),$$

$$u_y(x, b) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} \left( A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) \cos\frac{k\pi x}{a} = g(x).$$

Разлагая функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в ряд по собственным функциям  $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}$ , получим условия для нахождения коэффициентов  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ . Так как для определения  $A_0$  имеем два уравнения:

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx, \quad A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx,$$

То в случае, если не будет выполнено условие

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx, \quad (9)$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx, \quad (10)$$

а коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  ( $k \neq 0$ ) ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{k\pi}{a} (A_k - B_k) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \\ \frac{k\pi}{a} \left( A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \end{cases} \quad (11)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Так как для каждого  $k$  определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.

Коэффициент  $B_0$  ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

**Вывод:** Задача Неймана имеет решение, если граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть записано в виде ряда (8), коэффициенты которого  $A_0, A_k, B_k$  ( $k \neq 0$ ) определяются условиями (10), (11), а  $B_0$  – произвольная постоянная.



## Домашнее задание

С. 154, № 48.

28.05.2026



## Занятие № 17. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона

[Задача Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в кольце \(§ 3, с. 11-17\)](#)

### С. 157, № 63 (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце)

Перейдя к полярным координатам  $u(x, y) \rightarrow v(r, \varphi)$ , получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, & 2 < r < 3, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(2, \varphi) = 2 \cos \varphi, & v(3, \varphi) = 3 \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце:

$$v(r, \varphi) =$$

$$= A_0 \ln r + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos k\varphi + (B_k r^k + B_{-k} r^{-k}) \sin k\varphi.$$

Подчиним общее решение заданным граничным условиям:

$$v(2, \varphi) = 2 \cos \varphi =$$

$$= A_0 \ln 2 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k}) \sin k\varphi,$$

$$v(3, \varphi) = 3 \sin \varphi =$$

$$= A_0 \ln 3 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k}) \sin k\varphi,$$

Построим системы уравнений для нахождения коэффициентов  $A_0, B_0, A_k, A_{-k}, B_k, B_{-k}$ :

$$1) \begin{cases} A_0 \ln a + B_0 = 0 \\ A_0 \ln b + B_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 0, \\ B_0 = 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2A_1 + A_{-1}2^{-1} = 2, \\ 3A_1 + A_{-1}3^{-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{4}{5}, \\ A_{-1} = \frac{36}{5}, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2B_1 + B_{-1}2^{-1} = 0, \\ 3B_1 + B_{-1}3^{-1} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{9}{5}, \\ B_{-1} = -\frac{36}{5}, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k} = 0, \\ A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = 0, \\ A_{-k} = 0, \end{cases} \text{ для } k=2, 3, \dots$$

$$5) \begin{cases} B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k} = 0, \\ B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_k = 0, \\ B_{-k} = 0, \end{cases} \text{ для } k=2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$v(r, \varphi) = \left(-\frac{4}{5}r + \frac{36}{5}\frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{9}{5}r - \frac{36}{5}\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим

$$u(x, y) = \frac{9}{5}y - \frac{4}{5}x + \frac{36}{5} \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

**С. 156, № 58 (4).** Задача Дирихле для уравнения Пуассона в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = y, & 0 \leq x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = 1. \end{cases}$$

Перейдя к полярным координатам  $u(x, y) \rightarrow v(r, \varphi)$ , получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = r \sin \varphi, & 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(R, \varphi) = 1, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями  $r$ :

$$v(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi) \quad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$\begin{aligned} A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) \right) \cos k\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left( B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) \right) \sin k\varphi = r \cdot \sin \varphi. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $\sin k\varphi$  и  $\cos k\varphi$ , получим:

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0,$$

$$A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad \forall k,$$

$$B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r,$$

$$B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(R) \cos k\varphi + B_k(R) \sin k\varphi) \cos k\varphi = 1.$$

Отсюда получаем:

$$A_0(R) = 1, \quad A_k(R) = B_k(R) = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

В результате получили следующие краевые задачи:

$$1) \quad A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_0(R) = 1,$$

$$2) \quad A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

$$3) B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r, \quad 0 < r < R, \quad B_1(R) = 0,$$

$$4) B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad B_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при  $r = 0$ .

Решение задачи 1):  $A_0(r) \equiv 1$ .

Уравнение задачи 3) является неоднородным уравнением Эйлера<sup>1</sup>:

$$r^2 B_1''(r) + r B_1'(r) - B_1(r) = r^3. \quad (2)$$

Общее решение соответствующего однородного имеет вид:

$$B_1^{одн}(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$B_1^u(r) = D \cdot r^3.$$

Подставляя выражение для  $B_1^u(r)$  в уравнение (2), найдем  $D = 1/8$ .

Таким образом, общим решением уравнения (2) является функция:

$$B_1(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} + \frac{1}{8} r^3.$$

Из условия ограниченности решения задачи 3) имеем  $C_2 = 0$ . Учитывая условие  $B_1(R) = 0$ , найдем  $C_1 = -\frac{1}{8} R^2$ . Таким образом, получили решение задачи 3):

$$B_1(r) = -\frac{1}{8} R^2 r + \frac{1}{8} r^3.$$

Задачи 2) и 4) имеют нулевые решения:

---

<sup>1</sup> О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «Дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014)

<http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1>

$$A_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

$$B_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Решения задачи 1)-4) подставляем в ряд (1):

$$v(r, \varphi) = 1 + \left(-\frac{1}{8}R^2r + \frac{1}{8}r^3\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x, y) = 1 + \frac{1}{8}y(x^2 + y^2 - R^2).$$