



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

09.04.2025 (группа 22304)

10.04.2025 (группа 22303)

Занятие № 10

Задача Штурма-Лиувилля с граничными условиями 3-го рода

$$\begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = X'(l) + hX(l) = 0, & h = \text{const} > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для нахождения всех значений параметра c , при которых задача (1) имеет ненулевое решение, рассмотрим три случая:

1) Если $c = 0$, то общее решение уравнения задачи Ш-Л (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = A - hB = 0, \\ X'(l) + hX(l) = A + h(A l + B) = 0. \end{cases}$$

Для определителя матрицы системы имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -h \\ 1 + hl & h \end{vmatrix} = h(2 + hl) \neq 0.$$

Следовательно, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение задачи (1).

Вывод: собственные значения задачи Ш-Л (1) не могут быть равным 0.

- 2) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda(A - B) - h(A + B) = 0, \\ X'(l) + hX(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) + h(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\lambda - h) - B(\lambda + h) = 0, \\ A(\lambda + h)e^{\lambda l} - B(\lambda - h)e^{-\lambda l} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Полученная система (2) имеет ненулевое решение (A, B) , если определитель матрицы системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda - h & -(\lambda + h) \\ (\lambda + h)e^{\lambda l} & -(\lambda - h)e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + h^2)(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) + 2\lambda h(e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) не имеет вещественных корней, отличных от 0, так как при $\lambda < 0$ левая часть уравнения меньше 0, а при $\lambda > 0$ – положительна. Значит, определитель матрицы системы (2) отличен от 0 при любых $\lambda \neq 0$, и система (2) имеет нулевое решение $A = B = 0$. Следовательно, задача (1) имеет только нулевое решение.

Вывод: собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л (1) не могут быть отрицательными.

- 3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничным условиям задачи (1). Будем иметь:

$$\begin{cases} \lambda B - hA = 0, \\ \lambda(-A \sin \lambda l + B \cos \lambda l) + h(A \cos \lambda l + B \sin \lambda l) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Выясним, существуют ли такие $\lambda \neq 0$, при которых определитель матрицы системы (4) равен 0:

$$\begin{vmatrix} -h & \lambda \\ -\lambda \sin \lambda l + h \cos \lambda l & \lambda \cos \lambda l + h \sin \lambda l \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - h^2) \sin \lambda l - 2\lambda h \cos \lambda l = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2\lambda h} \quad (5)$$

Заметим, что, если λ^* является корнем уравнения (5), то и $(-\lambda^*)$ также является его корнем. Тогда, так как $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$, то для нахождения собственных значений следует выяснить, сколько положительных корней имеет уравнение (5). Графическое решение уравнения (5) (см. рис. 1) позволяет сделать следующий вывод: *существует бесконечное счетное множество положительных корней уравнения (5) $\lambda_k, k \in N$.*

Для каждого $\lambda = \lambda_k$ система (4) имеет ненулевое решение (A_k, B_k) , для которого

$$A_k = \frac{\lambda_k}{h} B_k, \quad \forall B_k \neq 0.$$

Следовательно, собственные значения задачи Ш-Л (1):

$$c_k = \lambda_k^2,$$

где λ_k – положительные корни уравнения (5), и соответствующие им собственные функции:

$$X_k(x) = \frac{\lambda_k}{h} B_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x, \quad \forall B_k \neq 0.$$

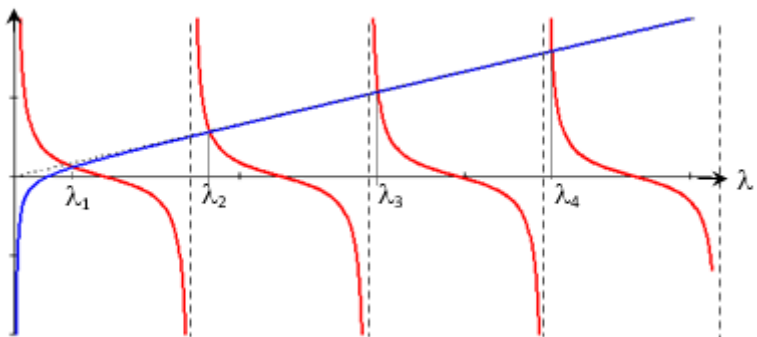


Рис. 1. Графическое решение уравнения (5)

Пусть $B_k = h \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Вывод: Задача Ш-Л имеет решение:

$$X_k(x) = \lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где λ_k – положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \quad (7)$$

Найдем квадрат нормы собственной функции:

$$\begin{aligned} \|X_k(x)\|^2 &= \int_0^l X_k^2(x) dx = \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x)^2 dx = \\ &= \int_0^l (\lambda_k^2 \cos^2 \lambda_k x + 2h\lambda_k \cos \lambda_k x \cdot \sin \lambda_k x + h^2 \sin^2 \lambda_k x) dx = \\ &= \int_0^l \left(\lambda_k^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\lambda_k x}{2} + h\lambda_k \sin 2\lambda_k x + h^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\lambda_k x}{2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \left(\frac{\lambda_k^2 + h^2}{2} + \frac{\lambda_k^2 - h^2}{2} \cos 2\lambda_k x + h\lambda_k \sin 2\lambda_k x \right) dx = \\
&= \frac{(\lambda_k^2 + h^2)l}{2} + \frac{\lambda_k^2 - h^2}{4\lambda_k} \sin 2\lambda_k l - \frac{h}{2} (\cos 2\lambda_k l - 1).
\end{aligned}$$



Домашнее задание

- 1) Полученное выражение для $\|X_k(x)\|^2$ преобразуйте к виду, не содержащему тригонометрических функций. Для упрощения выражения используйте тот факт, что λ_k – корни уравнения (7), т.е. $\operatorname{ctg} \lambda_k l = \frac{\lambda_k^2 - h^2}{2h\lambda_k}$.

Ответ: $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k^2)}{2} + h.$

- 2) Покажите ортогональность собственных функций на отрезке $[0, l]$, соответствующих различным собственным значениям.

16.04.2025 (группа 22304)

17.04.2025 (группа 22303)

Занятие № 11

Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности

Краевая задача, описывающая распространение тепла в однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, когда на концах стержня происходит теплообмен со средой с заданной температурой (пусть A – температура окружающей среды с торцевого сечения $x = 0$, а B – с торцевого сечения $x = l$):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_x(0, t) - h(u(0, t) - A) = u_x(l, 0) + h(u(l, t) - B) = 0, \quad t \geq 0, \\ h = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Решение задачи будем искать в виде суммы:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t), \quad (4)$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям:

$$\begin{cases} v'(0) - hv(0) = -Ah, \\ v'(l) + hv(l) = Bh. \end{cases} \quad (5)$$

Функция, удовлетворяющая условиям (5), может быть найдена в виде:

$$v(x) = \alpha x + \beta, \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим систему линейных уравнений, решая которую найдем:

$$\alpha = \frac{h(B - A)}{2 + hl}, \quad \beta = \frac{B + A + Ahl}{2 + hl}. \quad (7)$$

Зная $v(x)$, построим краевую задачу для определения функции $w(x,t)$. Подставив (4) в (1)–(3), получим:

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$w_x(0,t) - hw(0,t) = w_x(l,0) + hw(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$w(x,0) = \varphi(x) - \alpha x - \beta = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (10)$$

Будем искать решение краевой задачи (8)–(10) в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x), \quad (11)$$

где собственные функции $X_k(x)$ являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (Ш-Л):

$$\begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Задача Ш-Л имеет решение (см. [занятие № 10](#)):

$$X_k(x) = \lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где λ_k – положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2h\lambda}. \quad (14)$$

Подставляя ряд (11) в (8) и (10), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k'(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) \right) X_k(x) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \varphi_1(x).$$

Тогда функции $T_k(x)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$T_k'(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) = 0, \quad T_k(0) = \gamma_k, \quad t > 0, \quad k \in N, \quad (15)$$

где

$$\gamma_k = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} \int_0^l \varphi_1(\xi) X_k(\xi) d\xi, \quad k \in N. \quad (16)$$

Задачи Коши (15) имеют решения:

$$T_k(t) = \gamma_k e^{-(a\lambda_k)^2 t}, \quad k \in N. \quad (17)$$

Подставив (13) и (17) в (11), получим решение задачи (8)-(10):

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-(a\lambda_k)^2 t} (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x). \quad (18)$$

Замечание. Фундаментальным решением задачи (8)-(10) (функцией Грина) является функция:

$$G(x, \xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} e^{-(a\lambda_k)^2 t} X_k(x) X_k(\xi).$$

Вывод: задача (1)–(3) имеет решение

$$u(x, t) = \alpha x + \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x),$$

где α , β и γ_k определяются по формулам (7) и (16).

Гл. 5, § 4, с. 153: № 41 (3)

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = t + 1, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 1 + e^x \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

С помощью преобразований:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u(x, t) = t + 1 + w(x, t), \\ 2) \quad & w(x, t) = e^x z(x, t), \end{aligned} \tag{4}$$

решение исходной краевой задачи сводится к решению следующей:

$$\begin{aligned} z_t - z_{xx} &= \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ z(0, t) &= z(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ z(x, 0) &= \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение задачи (5) ищется в виде:

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \tag{6}$$

В (6) функции $\sin kx$, $k = 1, 2, \dots$, являются решением задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} X''(x) + cX(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) &= X(\pi) = 0. \end{aligned}$$

После подстановки ряда (6) в уравнение и начальные условия задачи (5) получим следующие задачи Коши:

$$1) \quad \begin{cases} T_1'(t) + T_1(t) = 1, & t > 0, \\ T_0(0) = 0, \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} T_2'(t) + 4T_2(t) = 0, & t > 0, \\ T_1(0) = 1, \end{cases}$$

$$3) \quad \forall k \neq 1, 2:$$

$$\begin{cases} T_k'(t) + k^2 T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $u(x, t) = 1 + t + (e^x - e^{x-t}) \sin x + e^{x-4t} \sin 2x$.



Домашнее задание

С. 153, № 41(3) (найти решения задач Коши 1)-3)).

[Примерный вариант КР-3](#)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

УМФ

Тема: **Решение краевой задачи для уравнения параболического типа**

Примерный вариант

Для смешанной краевой задачи, рассматриваемой в области $0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$:

$$u_t = 4u_{xx} - 4(t - 1) + \cos 3\pi x + \frac{x^2}{2},$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad u_x(1, t) = t,$$

$$u(x, 0) = x - \frac{x^2}{2} + \cos \pi x.$$

- 1) постройте и решите соответствующую задачу Штурма-Лиувилля;
- 2) постройте решение методом Фурье.

Контрольная работа – 14, 15 мая