



26.03.2025 (группа 22304)

27.03.2025 (группа 22303)

Занятие № 8

Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

Гл. 5, § 4, с. 150: № 31 (1)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Ненулевое решение краевой задачи будем искать в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

Подставив (4) в уравнение (1) и разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Равенство должно выполняться при любых $x \in (0, l)$ и $t > 0$, что возможно, если оба отношения равны некоторой константе, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -c, \quad c = \text{const}, \quad (5)$$

Откуда получаем два дифференциальных уравнения с параметром c :

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

$$T''(t) + ca^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Подставляя (4) в граничные условия (2):

$$X'(0)T(t) = X'(l)T(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

и, учитывая, что $T(t)$ не может быть тождественно равной 0, получим

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (6) и условия (8) дают соответствующую краевой задаче задачу Штурма-Лиувилля.

Решение задачи Ш-Л (см. [Занятие № 5, № 23\(г\)](#)):

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|X_n\|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \frac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Остается для каждого значения параметра $c = c_k$ найти общее решение уравнения (7). Оно имеет следующий вид:

$$T_k(t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t, & k = 0, \\ A_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ak\pi t}{l}, & k \neq 0, \end{cases} \quad (9)$$

где A_k и B_k – произвольные *const*.

Согласно методу Фурье, решение заданного уравнения (1) запишем в

виде ряда $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$:

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ak\pi t}{l} \right) \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (10)$$

Неизвестные константы A_k и B_k найдем, подчинив ряд (10) начальным условиям (3):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{l} = x, \\ u_t(x, 0) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты A_k и B_k являются коэффициентами разложений функций x и 1 соответственно в ряды по собственным функциям задачи Ш-Л:

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{l}{2}, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k=2n, \\ \frac{-4l}{(k\pi)^2}, & k=2n-1, \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad B_0 = 1, \quad B_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, решением задачи (1) – (3) является функция:

$$u(x, t) = \frac{l}{2} + t + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^k - 1)}{k^2} \cos \frac{ak\pi}{l} \right) \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Ответ:

Выражение для $u(x, t)$ может быть записано и в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{l}{2} + t - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{a(2n-1)\pi t}{l} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}. \quad (*)$$

Гл. 5, § 4, с. 152: № 38 (7)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t} \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 4 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

Будем искать решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x, t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x) = \cos \frac{(2k+1)x}{2}$ являются решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < \pi,$$

$$X'(0) = X(\pi) = 0,$$

и, следовательно,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos \frac{(2k+1)x}{2} \quad (4)$$

Подставляя ряд (4) в (1) и объединяя два ряда в один, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) + \frac{a^2(2k+1)^2}{4} T_k(t) \right) \cos \frac{(2k+1)x}{2} = Ae^{-t} \cos \frac{x}{2}.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + \frac{a^2(2k+1)^2}{4} T_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A e^{-t} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{(2k+1)x}{2} dx = \begin{cases} A e^{-t}, & k=0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

Подставляя ряд (4) в начальные условия (3), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \cos \frac{(2k+1)x}{2} = 0 \Rightarrow T_k(0) = 0 \quad \forall k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) \cos \frac{(2k+1)x}{2} = 4 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin x = 2(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{5x}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k'(0) = \begin{cases} 2, & k=0, \\ -2, & k=2, \\ 0 & k \neq 0, 2. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

$$1) \begin{cases} T_0''(t) + \frac{a^2}{4} T_0(t) = A e^{-t}, & t > 0, \\ T_0(0) = 0, \quad T_0'(0) = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} T_2''(t) + \frac{25a^2}{4} T_2(t) = 0, & t > 0, \\ T_2(0) = 0, \quad T_2'(0) = -2. \end{cases}$$

3) $\forall k \neq 0, 2$:

$$\begin{cases} T_k''(t) + \frac{a^2(2k+1)^2}{4} T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Решив задачи Коши, найдем:

$$1) T_0(t) = \frac{4A}{a^2+4} \left(e^{-t} - \cos \frac{at}{2} + \frac{2}{a} \sin \frac{at}{2} \right) + \frac{4}{a} \sin \frac{at}{2},$$

$$2) T_2(t) = -\frac{4}{5a} \sin \frac{5at}{2},$$

$$3) T_k(t) = 0, \quad \forall k \neq 0, 2.$$

Подставляя найденные выражения для $T_k(t)$ в (4), получим решение краевой задачи (1)–(3):

$$u(x, t) = \left(\frac{4A}{a^2+4} \left(e^{-t} - \cos \frac{at}{2} + \frac{2}{a} \sin \frac{at}{2} \right) + \frac{4}{a} \sin \frac{at}{2} \right) \cos \frac{x}{2} - \frac{4}{5a} \sin \frac{5at}{2} \cos \frac{5x}{2}.$$



Домашнее задание

1. С. 150, № 31 (2),
2. Решите задачи [1\)-3\)](#) (см. № 38(7)).

2.04.2025 (группа 22304)

3.04.2025 (группа 22303)

Занятие № 9

Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа

Примерный вариант контрольного задания

В области $0 < x < \pi$, $t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 16u_x + 4u_t - 4(\cos t + 4) = e^{2x} \sin 5x - \sin t,$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad u(\pi, t) = \pi + \sin t,$$

$$u(x, 0) = x + 2e^{2x} \cos x \sin 5x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

Решение задачи можно искать в виде:

$$u(x, t) = x + \sin t + w(x, t), \quad \left| \begin{array}{l} \text{(избавляемся от неоднородности в гра-} \\ \text{ничных условиях)} \end{array} \right. \quad (1)$$

где $w(x, t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$w_{tt} - 4w_{xx} + 16w_x + 4w_t = e^{2x} \sin 5x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$w(x, 0) = 2e^{2x} \cos x \sin 5x, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (4)$$

Уравнение краевой задачи можно упростить, если искать его решение в виде

$$w(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

определив коэффициенты α и β так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало ее производных по переменным x и t .

Так как

$$\begin{array}{l|l} 0 & w(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t), \\ 16 & w_x = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha v + v_x), \\ 4 & w_t = e^{\alpha x + \beta t} (\beta v + v_t), \\ -4 & w_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\ 1 & w_{tt} = e^{\alpha x + \beta t} (\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}), \end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{l|l} v & e^{\alpha x + \beta t} (16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2) \\ v_x & e^{\alpha x + \beta t} (16 - 8\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x + \beta t} (4 + 2\beta) \\ v_{xx} & -4e^{\alpha x + \beta t} \\ v_{tt} & e^{\alpha x + \beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 16 - 8\alpha = 0, \\ 4 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -2, \end{cases}$$

(при этом $16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2 = 12$)

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} - 4v_{xx} + 12v = e^{2t} \sin 5x. \quad (6)$$

А

$$w(x, t) = e^{2x - 2t} v(x, t). \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в условия (3) и (4), получим условия для функции $v(x, t)$:

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$v(x,0) = 2 \cos x \sin 5x, \quad v_t(x,0) = 4 \cos x \sin 5x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (9)$$

Будем искать решение краевой задачи (6), (8), (9) в виде ряда по собственным функциям:

$$v(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x) = \sin kx$, $k \in N$, являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} X''(x) + cX(x) &= 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) &= X(\pi) = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \quad (10)$$

Подставляя ряд (10) в (6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t)) \sin kx = e^{2t} \sin 5x.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = \begin{cases} e^{2t}, & k = 5, \\ 0, & k \neq 5. \end{cases}$$

Подставляя ряд (10) в начальные условия (9), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin kx = 2 \cos x \sin 5x = \sin 6x + \sin 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 4, 6, \\ 0, & k \neq 4, 6, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin kx = 4 \cos x \sin 5x = 2 \sin 6x + 2 \sin 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k'(0) = \begin{cases} 2, & k = 4, 6, \\ 0, & k \neq 4, 6. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

$$4) \begin{cases} T_4''(t) + 76T_4(t) = 0, & t > 0, \\ T_4(0) = 1, \quad T_4'(0) = 2. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} T_5''(t) + 112T_5(t) = e^{2t}, & t > 0, \\ T_5(0) = 0, \quad T_5'(0) = 0. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} T_6''(t) + 156T_6(t) = 0, & t > 0, \\ T_6(0) = 1, \quad T_6'(0) = 2. \end{cases}$$

$$7) \quad \forall k \neq 4, 5, 6:$$

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Задачи имеют следующие решения:

$$\left. \begin{aligned} T_4(t) &= \cos(\sqrt{76}t) + \frac{2}{\sqrt{76}} \sin(\sqrt{76}t); \\ T_5(t) &= \frac{1}{116} \left(e^{2t} - \cos(\sqrt{112}t) - \frac{2}{\sqrt{112}} \sin(\sqrt{112}t) \right); \\ T_6(t) &= \cos(\sqrt{156}t) + \frac{2}{\sqrt{156}} \sin(\sqrt{156}t); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$T_n(t) = 0, \quad \forall n \neq 4, 5, 6.$$

В результате будем иметь:

$$v(x, t) = T_4(t) \sin 4x + T_5(t) \sin 5x + T_6(t) \sin 6x \quad \rightarrow \quad (8) \quad \rightarrow$$

$$w(x, t) = e^{2x-2t} v(x, t) = e^{2x-2t} (T_4(t) \sin 4x + T_5(t) \sin 5x + T_6(t) \sin 6x) \quad \rightarrow \quad (1):$$

Ответ:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= x + \sin t + w(x, t) = \\ &= x + \sin(t) + e^{2x-2t} (T_4(t) \sin 4x + T_5(t) \sin 5x + T_6(t) \sin 6x), \end{aligned}$$

где функции $T_4(t)$, $T_5(t)$, $T_6(t)$ определяются по формулам (11).



Замечание. Функцию $h(x, t)$, удовлетворяющую граничным условиям:

$$\begin{cases} \alpha_1 h_x(0, t) + \beta_1 h(0, t) = 0, \\ \alpha_2 h_x(l, t) + \beta_2 h(l, t) = 0, \end{cases}$$

можно найти в виде:

- 1) $h(x, t) = A(t)x + B(t)$, если $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$,
- 2) $h(x, t) = A(t)x^2 + B(t)x$, если $\beta_1 = \beta_2 = 0$.



Домашнее задание

Докажите утверждение, приведенное в замечании.

Домашняя контрольная работа не тему «Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа»

Срок выполнения: **17 апреля**

[Варианты заданий](#)