



19.03.2025 (группа 22304)

20.03.2025 (группа 22303)

Занятие № 7

Задача Штурма-Лиувилля

При каких значениях параметра c задача

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0, \\ a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_i^2 + b_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

имеет ненулевое решение.

Собственные значения задачи Ш-Л являются **вещественными**.

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (б): $X'(0) = X(l) = 0$.

Рассмотрим три случая:

1) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X(l) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если $c = 0$, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = Al + B = 0.$$

Откуда получаем, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X(l) = A \cos(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\cos \lambda l = 0 \Leftrightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, нашли собственные значения¹:

$$c_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad \forall A_n \neq 0.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, отличаются на постоянный множитель.

Пусть $A_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|X_n\|^2 = \int_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{l}{2}$.

Ортогональность собственных функций.

$$(X_k, X_n) = \int_0^l \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx =$$

¹ При отрицательных значениях n не будут получены новые значения c .

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{(k+n+1)\pi x}{l} + \cos \frac{(k-n)\pi x}{l} \right) dx = 0 \quad \forall k \neq n.$$

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l}{2}.$$

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (г): $X'(0) = X'(l) = 0$.

Рассмотрим три случая:

1) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X'(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ B(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если $c = 0$, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \quad \text{и} \quad X'(l) = A = 0.$$

Получаем, что при $c = 0$ существует ненулевое решение $X(x) = B$, когда $B = \forall \text{const} \neq 0$. Пусть $B = 1$.

$$c_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad \|X_0\|^2 = \int_0^l 1 dx = l.$$

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X'(l) = A\lambda \sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin \lambda l = 0 \Leftrightarrow \lambda l = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, учитывая условие $\lambda \neq 0$, нашли собственные значения²:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \forall A_n \neq 0.$$

Пусть $A_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тогда $\|X_n\|^2 = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$.

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|X_n\|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \frac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Разложение функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Гл. 5, § 3, с. 132: № 25

Разложение функции $f(x)$ в ряд по системе функций $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$S(x, N) = \sum_{n=1}^N f_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S(x, N).$$

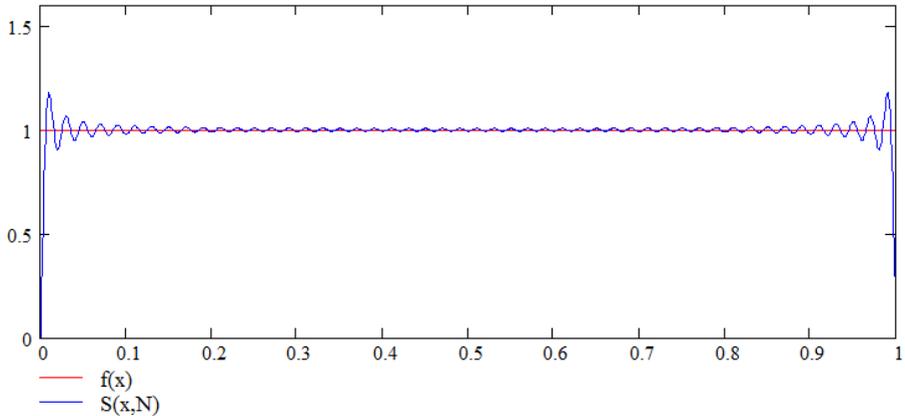
² При отрицательных значениях n не будут получены новые значения s .

1) $f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l).$$



$N = 99$

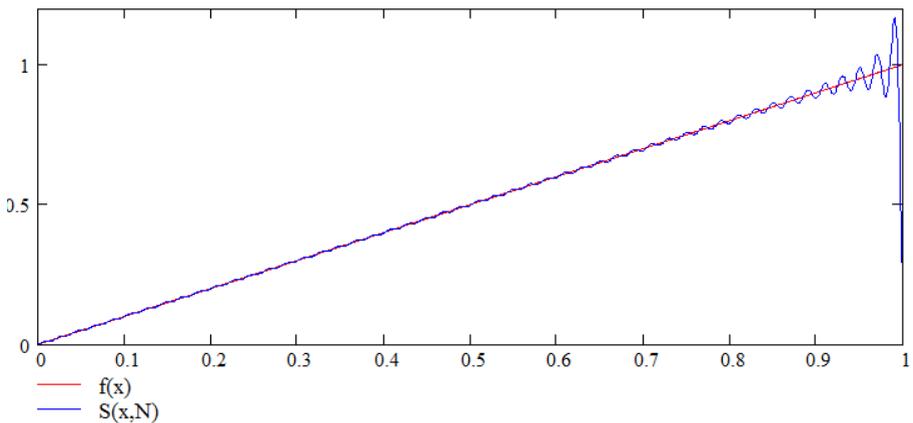


2) $f(x) = x$

$$f(x) = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [0, l).$$



$N = 99$

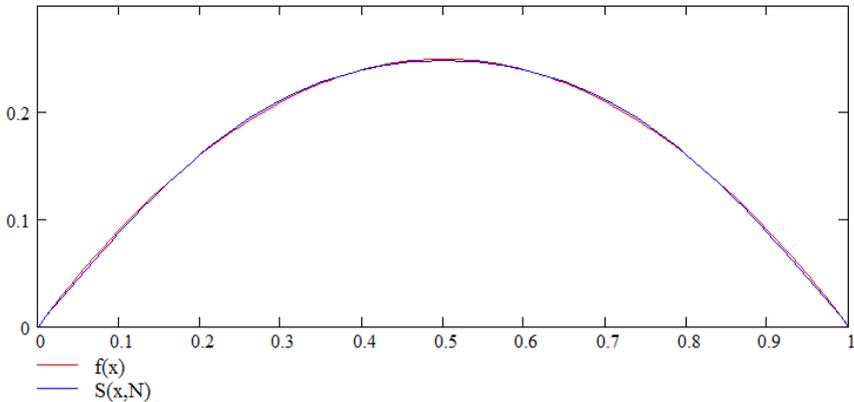


3) $f(x) = x(l - x)$

$$f(x) = \frac{4l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k^3} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [1, l].$$



N = 4



Домашнее задание

С. 127, Пример 1 – разбор решения;
с. 131, № 23 (в) (+ проверить свойство ортогональности собственных функций, вычислить нормы собственных функций),
с. 132, № 26.