



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

19.02.2025 (группа 22304)

20.02.2025 (группа 22303)

Занятие № 3

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Общая схема преобразования уравнения

$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$		
Тип уравнения		
$B^2 - AC > 0$	$B^2 - AC = 0$	$B^2 - AC < 0$
гиперболический	параболический	эллиптический
Уравнение характеристик		
$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$		
Первые интегралы уравнения характеристик (семейства характеристик)		
$\varphi(x, y) = C_1,$ $\psi(x, y) = C_2$	$\varphi(x, y) = C$	$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1,$ $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2$
Замена		
$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad J \neq 0$	$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$

$$u(x, y) = v(\xi, \eta),$$

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy},$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}$$

Канонический вид

$$v_{\xi\eta} = \Phi$$

$$v_{\eta\eta} = \Phi$$

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi$$

где $\Phi = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$

Гл. 2, § 5, с. 75-76: № 33 (1), № 34 (1)

№ 33 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$$

Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости.

1) Определение типа уравнения:

$d=1 > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип в любой точке плоскости.

2) Решение уравнения характеристик:

$$-2dydx - 4(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow dx(dy + 2dx) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ dy + 2dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ y + 2x = C_2. \end{cases}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x, \quad \eta = y + 2x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x, y + 2x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 1 & u_x = v_\xi + 2v_\eta \\ -2 & u_y = v_\eta \\ -4 & u_{yy} = v_{\eta\eta} \end{array}$$

$$2 \mid u_{xy} = v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta}$$

5) Построение канонического уравнения. Подстановка построенных выражений в заданное уравнение дает:

$$2v_{\xi\eta} + v_{\xi} + v + \xi = 0 \Leftrightarrow v_{\xi\eta} + \frac{1}{2}v_{\xi} + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\xi = 0.$$

№ 34 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \sin x \cdot u_{xy} + (2 - \cos^2 x) \cdot u_{yy} = 0.$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких x и y , при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).

2) Определение типа уравнения:

$$d = \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = -1 \Rightarrow \text{уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.}$$

3) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (dy)^2 + 2 \sin x \cdot dydx + (2 - \cos^2 x)(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dy + \sin x \cdot dx)^2 + (dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dy + \sin x dx + idx)(dy + \sin x dx - idx) &= 0. \end{aligned}$$

Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y - \cos x + ix = C_1, \quad y - \cos x - ix = C_2.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\begin{aligned} \xi &= y - \cos x, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta). \\ u(x, y) &= v(y - \cos x, x). \end{aligned}$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = \sin x \cdot v_{\xi} + v_{\eta} \\ 0 & u_y = v_{\xi} \\ 1 & u_{xx} = \sin^2 x \cdot v_{\xi\xi} + 2 \sin x \cdot v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + \cos x \cdot v_{\xi} \\ 2 - \cos^2 x & u_{yy} = v_{\xi\xi} \end{array}$$

$$-2 \sin x \mid u_{xy} = \sin x \cdot v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}$$

б) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2 \sin x - 2 \sin x = 0$	
v_{ξ}	$\cos x$	$\cos \eta$
v_{η}	0	

Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \cos \eta \cdot v_{\xi} = 0$.



Домашнее задание

Гл. 2, §3 с. 65: № 17(1, 6); §5 с. 75-76: № 33 (3), 34 (2).

Задание для самостоятельной работы

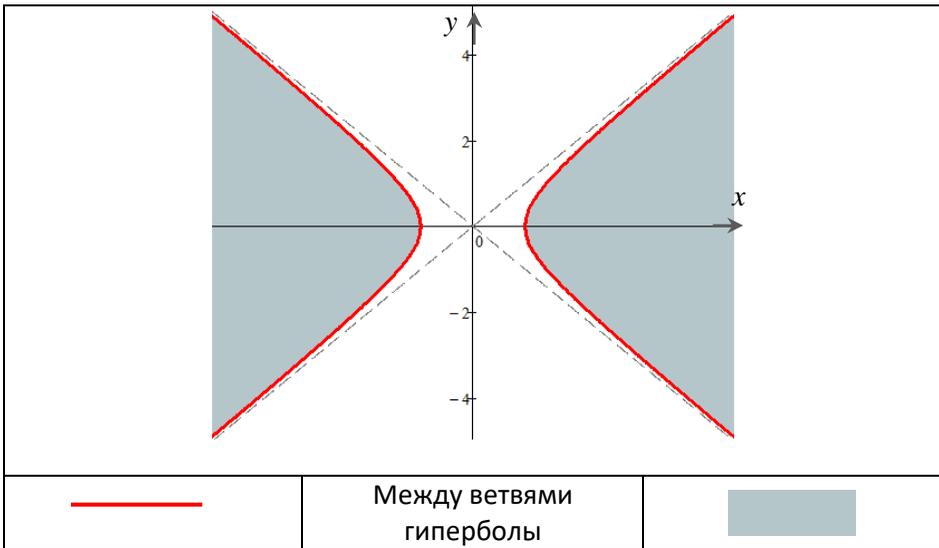
№ 35 (1). Области параболичности, гиперболичности и эллиптичности уравнения: $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$.

Дискриминант уравнения:

$$d = (xy)^2 + (1 - x^2)(1 + y^2) = 1 - x^2 + y^2.$$

Области, где сохраняются тип уравнения, описывают условия:

Область параболичности	Область гиперболичности	Область эллиптичности
$1 - x^2 + y^2 = 0$	$1 - x^2 + y^2 > 0$	$1 - x^2 + y^2 < 0$
Уравнение $1 - x^2 + y^2 = 0$ на координатной плоскости Oxy определяет гиперболу , которая является границей областей		



26.02.2025 (группа 22304)

27.02.2025 (группа 22303)

Занятие № 4

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

№ 40 (2). Найти решение уравнения

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0) = 2x$, $u_y(x,0) = 1$.

1) Определение типа уравнения:

$$d = 4 + 5 = 9 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (dy)^2 - 4dydx - 5(dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dy - 2dx)^2 - 9(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} dy - 5dx = 0, \\ dy + dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5x = C_1, \\ y + x = C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - 5x, \quad \eta = y + x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y - 5x, y + x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 1 & u_x = -5v_\xi + v_\eta \\ -1 & u_y = v_\xi + v_\eta \\ 1 & u_{xx} = 25v_{\xi\xi} - 10v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ -5 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ 4 & u_{xy} = -5v_{\xi\xi} - 4v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η
0	0	-36	-6	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{6}v_\xi = 0. \quad (2)$$

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{6}v_\xi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_\xi = w, \\ w_\eta + \frac{1}{6}w = 0. \end{cases}$$

$$w_\eta + \frac{1}{6}w = 0, \quad w(\xi, \eta) = C(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta},$$

$$v_\xi = C(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta}, \quad v(\xi, \eta) = \Phi(\xi)e^{-\frac{1}{6}\eta} + F(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(y - 5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)} + F(y + x). \quad (3)$$

8) Построение частного решения

Найдем производную:

$$u_y(x, y) = \Phi'(y - 5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)} - \frac{1}{6}\Phi(y - 5x)e^{-\frac{1}{6}(y+x)} + F'(y + x).$$

Подставляя (3) в заданные условия $u(x, 0) = 2x$, $u_y(x, 0) = 1$, получим систему для нахождения функций F и Φ :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} + F(x) = 2x, \\ u_y(x, 0) = \Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} - \frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} + F'(x) = 1. \end{cases}$$

Решение системы (методом подстановки)

$$\begin{cases} F(x) = 2x - \Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x}, \\ \Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} - \frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} + 2 + 5\Phi'(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} + \frac{1}{6}\Phi(-5x)e^{-\frac{1}{6}x} = 1 \end{cases}$$

$$6\Phi'(-5x)e^{-\frac{x}{6}} = -1, \quad \Phi'(-5x) = -\frac{1}{6}e^{\frac{x}{6}}, \quad \Phi'(t) = -\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{30}},$$

$$\Phi(t) = 5e^{-\frac{t}{30}} + C, \quad C - \text{const.}$$

Подставляя полученное выражение для Φ в первое уравнение системы, найдем

$$F(x) = 2x - 5 - Ce^{-\frac{x}{6}}.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = 2(y + x) - 5 + 5e^{-\frac{1}{5}y}.$$

№ 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y - 4)u_{xx} - 2\sin y \cdot u_{xy} + u_{yy} - \cos y \cdot u_x = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(\cos y, y) = \cos y$, $u_x(\cos y, y) = \sin y$.

1) Определение типа уравнения:

$$d = \sin^2 y - (\sin^2 y - 4) = 4 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (\sin^2 y - 4)(dy)^2 + 2 \sin y dy dx + (dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dx + \sin y dy)^2 - 4(dy)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx + (\sin y - 2)dy = 0, \\ dx + (\sin y + 2)dy = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \cos y - 2y = C_1, \\ x - \cos y + 2y = C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x - \cos y - 2y, \quad \eta = x - \cos y + 2y, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x - \cos y - 2y, x - \cos y + 2y).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$-\cos y$	$u_x = v_\xi + v_\eta$
0	$u_y = (\sin y - 2)v_\xi + (\sin y + 2)v_\eta$
$(\sin^2 y - 4)$	$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$
1	$u_{yy} = (\sin y - 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 y - 4)v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)^2 v_{\eta\eta} + \cos y \cdot v_\xi + \cos y \cdot v_\eta$
$-2\sin y$	$u_{xy} = (\sin y - 2)v_{\xi\xi} + 2\sin y \cdot v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)v_{\eta\eta}$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y - 2)^2 - 2 \sin y (\sin y - 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y + 2)^2 - 2 \sin y (\sin y + 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y - 4) + 2(\sin^2 y - 4) - 4 \sin^2 y = -16$
v_ξ	$-\cos y + \cos y = 0$
v_η	$-\cos y + \cos y = 0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta). \quad (2)$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(x - \cos y - 2y) + \Psi(x - \cos y + 2y). \quad (3)$$

8) Построение частного решения

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ :

$$\begin{cases} u(\cos y, y) = \Phi(-2y) + F(2y) = \cos y, \\ u_x(\cos y, y) = \Phi'(-2y) + F'(2y) = \sin y. \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y) + 2F'(2y) = -\sin y \Rightarrow \Phi'(-2y) = \frac{1}{2}\sin y + F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\frac{1}{2}\sin y + F'(2y) + F'(2y) = \sin y \Rightarrow F'(2y) = \frac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t) = \frac{1}{4}\sin \frac{t}{2}, \quad F(t) = -\frac{1}{2}\cos \frac{t}{2} + C, \quad C - const.$$

Найденное выражение для функции F подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y) - \frac{1}{2}\cos y + C = \cos y \Rightarrow \Phi(-2y) = \frac{3}{2}\cos y - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{3}{2}\cos \frac{t}{2} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{3}{2}\cos \frac{x - \cos y - 2y}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{x - \cos y + 2y}{2}.$$



Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (1).