**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

**12.02.2025** (группа 22304)
**13.02.2025** (группа 22303)

## Занятие № 2. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения методом характеристик.

**Гл. 2, § 3, с. 64**

**Построить общее решение уравнения**, приведя его к каноническому виду в указанной области изменения независимых переменных, считая $u = u(x, y)$.

**№ 14 (1).** $yu_x - xu_y = 0, \;\; x \neq 0, \; y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$
2) Решая уравнение характеристик методом разделения переменных, найдем его первый интеграл $x^2 + y^2 = C.$
3) Введем новые переменные:
$$\begin{cases} \xi = x^2 + y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big)$ найдем:
$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = 2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$yv_\eta = 0 \quad \to \quad v_\eta = 0.$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = 0 \quad \to \quad v(\xi,\eta) = C(\xi),$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x,y) = C(x^2 + y^2),}$$

где $C(\cdot)$ – произвольная дифференцируемая функция.

**№ 14 (7).** $\dfrac{1}{x}u_x + \dfrac{1}{y}u_y = \dfrac{u}{y^2}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1/x} = \frac{dy}{1/y} \quad \Leftrightarrow \quad xdx - ydy = 0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x^2 - y^2 = C.$

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$\frac{1}{x}v_\eta = \frac{v}{y^2} \quad \to \quad v_\eta = \frac{xv}{y^2} \xrightarrow{x=\eta,\ y^2=\eta^2-\xi} v_\eta = \frac{\eta v}{\eta^2 - \xi}.$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = \frac{\eta v}{\eta^2 - \xi} \quad \to \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \xi} + \ln|C(\xi)| \quad \to$$

$$\to \quad \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|\eta^2 - \xi| + \ln|C(\xi)| \quad \to \quad v(\xi,\eta) = C(\xi)\sqrt{|\eta^2 - \xi|},$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x,y) = v(x^2 - y^2, x) = C(x^2 - y^2)\sqrt{|x^2 - (x^2 - y^2)|} =$$

$$= C(x^2 - y^2)\sqrt{y^2} = |y|C(x^2 - y^2).$$

Учитывая произвольность функции C(·), общее решение заданного уравнения можно записать следующим образом:

$$\boxed{u(x,y) = yC(x^2 - y^2).}$$

**№ 13 (1):** Принимая ξ и η за новые переменные, преобразовать уравнение $xu_x + \sqrt{1+y^2}\cdot u_y = xy$, если $\xi = \ln x$, $\eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ в области $x > 0$.

Построим выражения для производных функции $u(x,y)$ при переходе к новым переменным $u(x,y) = v\left(\xi(x,y), \eta(x,y)\right)$:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{x} v_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) v_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} v_\eta.$$

Подставив выражения для производных в уравнение

$$xu_x + \sqrt{1+y^2}\cdot u_y = xy,$$

учитывая связь между старыми и новыми переменными:

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^\xi, \\ y = \dfrac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} = \operatorname{sh}\eta \end{cases}$$

получим: $\boxed{v_\xi + v_\eta = e^\xi \operatorname{sh}\eta.}$

$$u_x + u_y = e^x \operatorname{sh} y \qquad (*)$$

1) Составляем уравнение характеристик:
$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \quad \Leftrightarrow \quad dx - dy = 0.$$
2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x - y = C$.
3) Введем новые переменные:
$$\begin{cases} \xi = x - y, \\ \eta = x. \end{cases}$$
Так как $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то преобразование является невырожденным.

Для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ найдем:
$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -v_\xi.$$
После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:
$$v_\eta = e^x \operatorname{sh} y \xrightarrow{x=\eta,\ y=\eta-\xi} v_\eta = e^\eta \operatorname{sh}(\eta - \xi).$$
4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:
$$v_\eta = e^\eta \operatorname{sh}(\eta-\xi) \quad \to \quad v(\xi,\eta) = \int e^\eta \operatorname{sh}(\eta-\xi)d\eta + C(\xi).$$
Так как
$$\int e^\eta \operatorname{sh}(\eta-\xi)d\eta = \frac{1}{2}\int \left(e^{2\eta-\xi} - e^\xi\right)d\eta = \frac{1}{4}e^{2\eta-\xi} - \frac{1}{2}\eta e^\xi,$$
то получим
$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{4}e^{2\eta-\xi} - \frac{1}{2}\eta e^\xi + C(\xi).$$
где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x,y)=v(x-y,x)=\frac{1}{4}e^{x+y}-\frac{1}{2}xe^{x-y}+C(x-y).}$$

**Дополнение**

Зная решение уравнения (*), запишем решение уравнения из **№ 13 (1):**

$$\boxed{\begin{aligned}&v(\xi,\eta)=\frac{1}{4}e^{\xi+\eta}-\frac{1}{2}\xi e^{\xi-\eta}+C(\xi-\eta),\\&u(x,y)=v\left(\ln x,\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right)=\frac{1}{4}x\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)-\\&-\frac{1}{2}\cdot\frac{x\ln x}{y+\sqrt{y^2+1}}+C\left(\ln\frac{x}{y+\sqrt{y^2+1}}\right),\quad x>0.\end{aligned}}$$

**Домашнее задание**

С. 64: №№ 12, 13(2), 14 (2, 4).

**19.02.2025** (группа 22304)
**20.02.2025** (группа 22303)

**Занятие № 3**

**Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения. Задача Коши**

**С. 65, № 17 (3):** $xu_x+yu_y=2xy,\quad u(x,x)=x^2.$

1) Будем рассматривать уравнение, считая $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Решая уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$

найдем его первый интеграл $x/y = C$. Это уравнение определяет на плоскости семейство характеристик, которые являются прямыми ( $x = Cy$ ).

2) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x/y, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = x/y^2 \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{y} v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -\frac{x}{y^2} v_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$x v_\eta = 2xy \xrightarrow{x=\eta,\ y=\eta/\xi} v_\eta = \frac{2\eta}{\xi}.$$

3) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = \frac{2\eta}{\xi} \quad \to \quad v(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{\xi} + F(\xi),$$

где $F(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

4) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x,y) = xy + F\left(\frac{x}{y}\right),}$$

где $F(\cdot)$ – произвольная дифференцируемая функция.

5) <u>Задача Коши</u>. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Для нахождения функции $F$ используем условие $u(x,x) = x$:

$$u(x,x) = F(1) + x^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad F(1) = 0.$$

Решение задачи Коши: $u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+xy,$ где $F$ – произвольная дифференцируемая функция, для которой $F$ (1)=0.

**Замечание**. Неоднозначность решения объясняется тем, что условие задано на одной из характеристик ( $y=x$ ). Для сравнения найдем решение при условии $u(x,x^2)=x^2$. Так как

$$u(x,x^2)=F(1/x)+x^3=x^2 \quad \Rightarrow \quad F(1/x)=x^2-x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{x-1}{x^3},$$

то решение задачи Коши получим следующее:

$$u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+xy=\frac{x/y-1}{x^3/y^3}+xy=\frac{xy^2-y^3}{x^3}+xy=\frac{y(xy-y^2+x^4)}{x^3}.$$

**Домашнее задание**

С. 65: № 17(1, 6).