



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.



№ 17

**21.05.2025** (группа 22304)

**22.05.2025** (группа 22303)

## Занятие № 16. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона

[Задача Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в кольце \(§ 3, с. 16-17\)](#)

**Задача 1.** Найти решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0, & 1 < r < 2, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(1, \varphi) = 2 + \cos 2\varphi, & u_r(2, \varphi) = \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце:

$$u(r, \varphi) =$$

$$= A_0 \ln r + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos k\varphi + (B_k r^k + B_{-k} r^{-k}) \sin k\varphi.$$

Подчиним общее решение заданным граничным условиям:

$$u(1, \varphi) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + A_{-k}) \cos k\varphi + (B_k + B_{-k}) \sin k\varphi = 2 + \cos 2\varphi,$$

$$u_r(2, \varphi) = \frac{A_0}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (kA_k 2^{k-1} - kA_{-k} 2^{-k-1}) \cos k\varphi + (kB_k 2^{k-1} - kB_{-k} 2^{-k-1}) \sin k\varphi = \sin \varphi,$$

Построим системы уравнений для нахождения коэффициентов  $A_0, B_0, A_k, A_{-k}, B_k, B_{-k}$ :

$$1) \begin{cases} B_0 = 2, \\ A_0 / 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 0, \\ B_0 = 2, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} A_2 + A_{-2} = 1, \\ 4A_2 - \frac{1}{4}A_{-2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{1}{17}, \\ A_{-2} = \frac{16}{17}, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} B_1 + B_{-1} = 0, \\ B_1 - \frac{1}{4}B_{-1} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{4}{5}, \\ B_{-1} = -\frac{4}{5}, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A_k + A_{-k} = 0, \\ kA_k 2^{k-1} - kA_{-k} 2^{-k-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = 0, \\ A_{-k} = 0, \end{cases} \quad k \neq 0, 2.$$

$$5) \begin{cases} B_k + B_{-k} = 0, \\ kB_k 2^{k-1} - kB_{-k} 2^{-k-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_k = 0, \\ B_{-k} = 0, \end{cases} \quad k \neq 0, 1.$$

Таким образом,

$$u(r, \varphi) = 2 + \frac{1}{17}(r^2 + 16r^{-2}) \cos 2\varphi + \frac{4}{5}(r - \frac{1}{r}) \sin \varphi.$$

**Задача 2.** Найти решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0, & 1 < r < 2, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u_r(1, \varphi) = 2 + \cos 2\varphi, & u_r(2, \varphi) = \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Краевая задача не имеет решения, так как не выполнено условие разрешимости задачи Неймана в кольце:

$$\int_0^{2\pi} (2 + \cos 2\varphi) d\varphi \neq 2 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi.$$

**Задача 3.** Найти ограниченное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = F(r, \varphi), & 0 < r < a, \\ u(a, \varphi) = f(\varphi). \end{cases}$$

$$\Delta u(r, \varphi) = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями  $r$ :

$$u(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi) \quad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$\begin{aligned} A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) \right) \cos k\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left( B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) \right) \sin k\varphi = F(r, \varphi). \end{aligned}$$

Разложив функцию  $F(r, \varphi)$  в ряд Фурье

$$F(r, \varphi) = \frac{\alpha_0^F(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^F(r) \cos k\varphi + \beta_k^F(r) \sin k\varphi),$$

приравнявая коэффициенты при  $\sin k\varphi$  и  $\cos k\varphi$ , получим:

$$\begin{aligned} A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) &= \frac{\alpha_0^F(r)}{2}, \\ A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) &= \alpha_k^F(r), \quad \forall k \in N, \\ B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) &= \beta_k^F(r), \quad \forall k \in N, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_k^F(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \psi) \cos k\psi d\psi, \quad \beta_k^F(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \psi) \sin k\psi d\psi, \quad \forall k.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(a) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(a) \cos k\varphi + B_k(a) \sin k\varphi) = f(\varphi).$$

Разложив функцию  $f(\varphi)$  в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0^f}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^f \cos k\varphi + \beta_k^f \sin k\varphi),$$

приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях ряда, получим:

$$A_0(a) = \frac{\alpha_0^f}{2}, \quad A_k(a) = \alpha_k^f, \quad B_k(a) = \beta_k^f \quad \forall k \neq 0.$$

В результате будем иметь следующие краевые задачи:

$$1) \quad A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = \frac{\alpha_0^F(r)}{2}, \quad 0 < r < a, \quad A_0(a) = \alpha_0^f,$$

$$2) \quad \begin{cases} A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = \alpha_k^F(r), & 0 < r < a, \\ A_k(a) = \alpha_k^f, & \forall k \in N, \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = \beta_k^F(r), & 0 < r < a, \\ B_k(a) = \beta_k^f, & \forall k \in N. \end{cases}$$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при  $r = 0$ .

*Замечание.* Уравнения краевых задач 1)-3) – неоднородные уравнения Эйлера<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «Дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014)

<http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1>



## Домашнее задание

1. С. 157, № 63,
2. С.156, № 58(4).

**28.05.2025**

### Занятие № 17. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье

---

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (1)$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(a, y) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3)$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

---

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (5)$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \quad (6)$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \quad (7)$$

---

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad \|Y_k(y)\|^2 = \frac{b}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для каждого значения параметра  $c = c_k$  общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (8)$$

Произвольные постоянные  $A_k$  и  $B_k$  найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{k\pi y}{b} = \mu(y),$$

$$u(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b} = \nu(y).$$

Разложив функции  $\mu(y)$  и  $\nu(y)$  в ряд по собственным  $Y_k(y)$ , получим:

$$\begin{cases} A_k + B_k = \frac{2}{b} \int_0^b \mu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} = \frac{2}{b} \int_0^b \nu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \nu_k, \end{cases} \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{v_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - v_k}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставив полученные выражения для  $A_k$  и  $B_k$  в ряд (8), получим

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + \mu_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}.$$

**Задача Неймана** для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, & u_y(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, b) = g(x). \end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{1}$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (1) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\|X_k(x)\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра  $c = c_k$  общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} \right) \cos\frac{k\pi x}{a}. \quad (8)$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при  $y = 0$  и  $y = b$ . Будем иметь:

$$u_y(x, 0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} (A_k - B_k) \cos\frac{k\pi x}{a} = f(x),$$

$$u_y(x, b) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} \left( A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) \cos\frac{k\pi x}{a} = g(x).$$

Разлагая функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в ряд по собственным функциям  $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}$ , получим условия для нахождения коэффициентов  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ . Так как для определения  $A_0$  имеем два уравнения:

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx, \quad A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx,$$

То в случае, если не будет выполнено условие

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx, \quad (9)$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx, \quad (10)$$

а коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  ( $k \neq 0$ ) ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{k\pi}{a} (A_k - B_k) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \\ \frac{k\pi}{a} \left( A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \end{cases} \quad (11)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Так как для каждого  $k$  определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.

Коэффициент  $B_0$  ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

**Вывод:** Задача Неймана имеет решение, если граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть записано в виде ряда (8), коэффициенты которого  $A_0, A_k, B_k$  ( $k \neq 0$ ) определяются условиями (10), (11), а  $B_0$  – произвольная постоянная.

## Разобрать решение следующих задач:

### С. 154, № 48

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы:

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (2)$$

когда функции  $v(x, y)$  и  $w(x, y)$  являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v(0, y) = v(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ v(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad v(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ w(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad w(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

Решение краевой задачи (3) можно найти в виде ряда по собственным функциям  $X_k(x)$  (граничные условия однородные для  $x = 0$  и  $x = a$ ):

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (5)$$

Подставив (5) в уравнение Лапласа и граничные условия задачи (3) при  $y = 0$  и  $y = b$ , получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, & 0 < y < b, \quad k \in N, \\ Y_k(0) = \begin{cases} B, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} & Y_k(b) = 0, \quad k \in N. \end{cases} \quad (6)$$

решив которые, найдем  $Y_k(y)$ :

$$Y_1(y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}}, \quad Y_k(y) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Таким образом, для задачи (3) получаем следующее решение

$$v(x, y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Сравнивая условия задач (3) и (4), нетрудно установить, что решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x, y) = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

**Ответ:**

$$u(x, y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

**С. 154, № 49**

$$\begin{cases} \Delta u = -2, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Решение краевой задачи ищется в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение  $u_{xx} + u_{yy} = -2$  и граничные условия  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$  дает следующие краевые задачи для определения функций  $Y_k(y)$ :

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = -\frac{4}{a} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \begin{cases} -\frac{8}{k\pi}, & k = 2n - 1, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & k = 2n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$Y_k(0) = Y_k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, для четных  $k$  задачи Коши имеют нулевые решения. Решая задачи Коши для нечетных  $k$ , получим:

$$Y_k(y) = C_{1k} e^{\frac{k\pi y}{a}} + C_{2k} e^{-\frac{k\pi y}{a}} + \frac{8a^2}{(k\pi)^3},$$

где

$$C_{1k} = \frac{8a^2}{(k\pi)^3} \cdot \frac{e^{-\frac{k\pi b}{a}} - 1}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}}, \quad C_{2k} = \frac{8a^2}{(k\pi)^3} \cdot \frac{1 - e^{\frac{k\pi b}{a}}}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}}.$$

Подставив найденные  $Y_k(y)$  в ряд (1), учитывая, что ненулевыми будут только слагаемые, соответствующие нечетным  $k$ , получим:

$$u(x, y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi(b-y)}{a} + \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi y}{a}}{(2n-1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a}} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{a}.$$

### С. 154, № 49 (второй способ)

Так как правая часть уравнения  $f(x, y) = -2$  и граничные функции в условиях  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  не зависят от  $y$ , то решение можно искать в виде:

$$u(x, y) = v(x) + w(x, y),$$

где функции  $v(x)$  и  $w(x, y)$  являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} v''(x) = -2, & 0 < x < a, \\ v(0) = v(a) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(0, y) = w(a, y) = 0, & w(x, 0) = w(x, b) = -v(x). \end{cases} \quad (2)$$

Решением граничной задачи (1) является функция:  $v(x) = x(a - x)$ .

Решение задачи (2) будем искать в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (3)$$

Подстановка ряда (3) в уравнение  $\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0$  и граничные условия  $w(x, 0) = w(x, b) = -v(x) = x(x - a)$ , дает следующие краевые задачи для определения функций  $Y_k(y)$ :

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = \frac{2}{a} \int_0^a x(x-a) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots$

**Завершить решение**

---