



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.



Занятие № 13

23.04.2025 (группа 22304)

24.04.2025 (группа 22303)

Занятие № 12. Краевые задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона

Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad |x| < +\infty, \end{aligned} \quad (1)$$

имеет решение, представимое с помощью **интеграла Пуассона**:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (2)$$

где функция

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (3)$$

является **фундаментальным решением** уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).

Заметим, что
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) d\xi = 1. \quad (4)$$

Задача 1

Построить решение краевой задачи для уравнения теплопроводности на прямой (задача Коши):

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} + 8u_x + 3u + e^{-x}(1 + te^{-t}), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 2e^{-x}, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Решение.

1. Приведение краевой задачи к виду (1). Будем искать решение краевой задачи (1.1) в виде:

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

определив коэффициенты α и β так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало самой функции v и ее производной v_x .

✓ Для определения коэффициентов все слагаемые из правой части уравнения задачи (1.1) перенесем в левую часть. Так как

$$\begin{array}{l|l} -3 & u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t), \\ -8 & u_x = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha v + v_x), \\ 1 & u_t = e^{\alpha x + \beta t} (\beta v + v_t), \\ -4 & u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производная v_x входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{l|l} v & e^{\alpha x + \beta t} (-3 - 8\alpha + \beta - 4\alpha^2) \\ v_x & e^{\alpha x + \beta t} (-8 - 8\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x + \beta t} \cdot 1 \\ v_{xx} & -4e^{\alpha x + \beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} -8-8\alpha = 0, \\ -3-8\alpha + \beta - 4\alpha^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = -1, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} = 4v_{xx} + t + e^t. \quad (1.2)$$

А для функции $u(x, t)$ будем иметь

$$u(x, t) = e^{-x-t} v(x, t). \quad (1.3)$$

Подставляя выражение (1.3) в начальное условие задачи (1.1), получим начальное условие для функции $v(x, t)$:

$$v(x, 0) = 2, \quad |x| < +\infty. \quad (1.4)$$

2. Построение решения краевой задачи (1.2), (1.4) с помощью формулы (2), учитывая свойство функции Грина (4):

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + e^\tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \zeta, t) d\zeta + \int_0^t (\tau + e^\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= 2 + \int_0^t (\tau + e^\tau) d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + e^t. \end{aligned}$$

Ответ: $u(x, t) = \left(1 + e^t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-x-t}.$

Задача 2

Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-t}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Зачастую вычисления, связанные с интегралом Пуассона, являются громоздкими. Для широкого класса функций $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ можно применить **метод частных решений**. Для этого заметим, что оператор теплопроводности $Lu = u_t - a^2 u_{xx}$ переводит (отображает), например, функции вида $g(t) \sin \lambda x$ и $g(t) \cos \lambda x$ в функции того же вида $h(t) \sin \lambda x$ и $h(t) \cos \lambda x$ соответственно.

Разобьем задачу (2.1) на две:

$$1) \quad v_t = v_{xx} + e^{-t}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad |x| < +\infty,$$

$$2) \quad w_t = w_{xx}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$w(x, 0) = \cos x, \quad |x| < +\infty.$$

Решение первой задачи (2.2) найдем с помощью формулы Пуассона (2):

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

Решение второй задачи (2.3) будем искать в виде $w(x, t) = g(t) \cos x$, где функция $g(t)$ подлежит определению. Подставляя это выражение в уравнение и начальное условие задачи (2.3), будем иметь

$$g'(t) \cos x = -g(t) \cos x, \quad g(0) \cos x = \cos x.$$

Отсюда получаем задачу Коши

$$\begin{cases} g'(t) = -g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решением является функция $g(t) = e^{-t}$. Следовательно, $w(x, t) = e^{-t} \cos x$. Суммируя решения задач (2.2) и (2.3), получим решение задачи (2.1):

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = 1 - e^{-t} + e^{-t} \cos x.$$

Задача 3

Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + e^{-t} \sin 2x, & |x| < +\infty, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \cos x, & |x| < +\infty.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Решение можно построить, разбив задачу (3.1) на две:

$$\begin{aligned}1) \quad v_t &= v_{xx} + e^{-t} \sin 2x, & |x| < +\infty, \quad t > 0, \\v(x, 0) &= 0, & |x| < +\infty.\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}2) \quad w_t &= w_{xx}, & |x| < +\infty, \quad t > 0, \\w(x, 0) &= \cos x, & |x| < +\infty.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Тогда решение задачи (3.1) найдем в виде суммы:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t).\tag{3.4}$$

Обе задачи (3.2) и (3.3) можно решить, применив метод частных решений. Решение первой задачи ищем в виде $v(x, t) = h(t) \sin 2x$, а второй – $w(x, t) = g(t) \cos x$.



Покажите, что функции $g(t)$ и $h(t)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} h'(t) = -4h(t) + e^{-t}, \\ h(0) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g'(t) = -g(t), \\ g(0) = 1, \end{cases}$$

соответственно. Найдите их решения.

Ответ: $u(x, t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t}) \sin 2x + e^{-t} \cos x.$



Домашнее задание

1. Решить задачу Коши:

$$u_t = 4u_{xx} + \sin t \cdot \cos x, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \cos x + \sin x, \quad |x| < +\infty.$$

2. С. 174, № 72(2)

3. Решить примерный вариант [контрольной работы № 3](#)

КР-3: 14-15 мая

30.04.2025 (группы 22303, 22304)

Занятие № 13. Свойства интеграла Пуассона

Свойство 1. Пусть функция $\Phi(x)$ определена, ограничена на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ и имеет на ней ограниченную производную, а линейная комбинация $\alpha\Phi'(x) - \beta\Phi(x)$ является нечетной относительно точки $x = 0$. Докажите, что функция $u(x, t)$, определяемая интегралом Пуассона:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi, \quad (1)$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \quad (2)$$

удовлетворяет условию:

$$(\alpha u_x(x, t) - \beta u(x, t)) \Big|_{x=0} = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для функции $G(x, \xi, t)$ справедливо следующее:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad G(x, \xi, t) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0.$$

В силу наложенных на $\Phi(x)$ условий функцию (1) можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha u_x(x, t) - \beta u(x, t) &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi = \\ &= -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} G_\xi(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Применив к первому интегралу правило интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\xi(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi &= G(x, \xi, t) \Phi(\xi) \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi'(\xi) d\xi = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Внеинтегральные слагаемые при $\xi \rightarrow \pm\infty$ обращаются в ноль в силу ограниченности $\Phi(x)$ и свойства функции $G(x, \xi, t)$.

В результате получаем

$$\begin{aligned} \alpha u_x(x, t) - \beta u(x, t) &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi'(\xi) d\xi - \beta \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) (\alpha \Phi'(\xi) - \beta \Phi(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция при $x = 0$ является нечетной, то интеграл при $x = 0$ на симметричном промежутке равен 0, т. е. будем иметь:

$$(\alpha u_x(x, t) - \beta u(x, t)) \Big|_{x=0} = 0.$$



Можно ли утверждать, что если в (1) функция $\Phi(x)$ является нечетной, то $u(0, t) = 0$, а если $\Phi(x)$ четная функция, то $u_x(0, t) = 0$?

Свойство 2. Пусть функция $\Phi(x)$ определена и непрерывна на прямой, является нечетной относительно точки $x = 0$ и $2l$ -периодичной. Докажите, что функция $u(x, t)$, определяемая интегралом Пуассона (1), удовлетворяет условиям: $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Доказательство. Так как функция $G(0, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}$ является четной относительно точки $\xi=0$, то произведение $\Phi(\xi)G(0, \xi, t)$ - функция нечетная относительно точки $\xi=0$. Тогда

$$u(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(0, \xi, t)d\xi = 0$$

как интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке. Для $u(l, t)$ справедливы следующие преобразования:

$$u(l, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(l, \xi, t)d\xi = \int_{-\infty}^l \Phi(\xi)G(l, \xi, t)d\xi + \int_l^{+\infty} \Phi(\xi)G(l, \xi, t)d\xi.$$

Так как $G(l, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(0-(\xi-l))^2}{4a^2 t}} = G(0, \xi-l, t)$, то

$$u(l, t) = \int_{-\infty}^l \Phi(\xi)G(0, \xi-l, t)d\xi + \int_l^{+\infty} \Phi(\xi)G(0, \xi-l, t)d\xi. \quad (*)$$

Выполним преобразование первого интеграла в равенстве (*):

$$\int_{-\infty}^l \Phi(\xi)G(0, \xi-l, t)d\xi = [\xi = -\eta] = \int_{-l}^{+\infty} \Phi(-\eta)G(0, -\eta-l, t)d\eta \ominus$$

Так как $\Phi(-\eta) = -\Phi(\eta)$, $G(0, -\eta - l, t) = G(0, \eta + l, t)$, то

$$\begin{aligned} \ominus \int_{-l}^{+\infty} \Phi(\eta) G(0, \eta + l, t) d\eta &= \left[\begin{array}{c} \text{так как} \\ \Phi(\eta) = \Phi(\eta + 2l) \end{array} \right] = \\ &= - \int_{-l}^{+\infty} \Phi(\eta + 2l) G(0, \eta + l, t) d\eta = [\xi = \eta + 2l] = \\ &= - \int_l^{+\infty} \Phi(\xi) G(0, \xi - l, t) d\xi. \end{aligned}$$

Первый интеграл в (*) заменим полученным выражением:

$$u(l, t) = - \int_l^{+\infty} \Phi(\xi) G(0, \xi - l, t) d\xi + \int_l^{+\infty} \Phi(\xi) G(0, \xi - l, t) d\xi = 0.$$

Ч.т.д. ►



Домашнее задание

Решить примерный вариант [контрольной работы № 3](#)

КР-3: 14-15 мая