



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

5.02.2025 (группа 22304)

6.02.2025 (группа 22303)

Занятие № 1. Простейшие уравнения в частных производных.

Общее решение

С. 55: № 6 (1-10). Построить общее решение $u = u(x, y)$ уравнений.

- 1) $u_x = 0 \rightarrow u(x, y) = \Phi(y)$, где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.
- 2) $u_x = f(y) \rightarrow u(x, y) = \int f(y)dx + \Phi(y) = xf(y) + \Phi(y)$, где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.
- 3) $u_x = f(x) \rightarrow u(x, y) = \int f(x)dx + \Phi(y)$, где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.
- 4) $u_x = f(x, y) \rightarrow u(x, y) = \int f(x, y)dx + \Phi(y)$, где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.
- 5) $u_{xx} = 0 \rightarrow u_x = \Phi(y) \rightarrow u(x, y) = x\Phi(y) + \Psi(y)$, где $\Phi(y), \Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.
- 6) $u_{xx} = f(x) \rightarrow u_x = \int f(x)dx + \Phi(y) \rightarrow u(x, y) = \int \int f(x)dx dx + x\Phi(y) + \Psi(y)$, где $\Phi(y), \Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.
- 7) $u_{xx} = f(y) \rightarrow u_x = xf(y) + \Phi(y) \rightarrow$

$u(x, y) = \frac{x^2 f(y)}{2} + x\Phi(y) + \Psi(y)$, где $\Phi(y), \Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.

8) $u_{xx} = f(x, y) \rightarrow u_x = \int f(x, y) dx + \Phi(y) \rightarrow$
 $\rightarrow u(x, y) = \int \int f(x, y) dx dy + x\Phi(y) + \Psi(y)$, где $\Phi(y), \Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.

9) $u_{xy} = 0 \rightarrow u_x = \Phi(x) \rightarrow u(x, y) = \int \Phi(x) dx + \Psi(y) =$
 $= G(x) + \Psi(y)$, где $G(x), \Psi(y)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

10) $u_{xy} = f(x) \rightarrow u_x = \int f(x) dy + \Phi(x) = yf(x) + \Phi(x) \rightarrow$
 $u(x, y) = y \int f(x) dx + \int \Phi(x) dx + \Psi(y) = y \int f(x) dx + G(x) + \Psi(y)$,
 где $G(x), \Psi(y)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Вывод: общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Количество произвольных величин (функций) совпадает с порядком уравнения.

№ 7 (1): $xu_{xy} + u_y = 0$

1 способ (понижение порядка уравнения с помощью замены).

1) При $x \neq 0$ имеем

$$xu_{xy} + u_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_y, \\ xv_x + v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2) Построим общее решение уравнения

$$xv_x + v = 0 \quad (2)$$

методом разделения переменных, рассматривая уравнение (2) как «обыкновенное дифференциальное уравнение», в котором переменную y считаем параметром):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial y}, \quad \ln |v| = -\ln |x| + \ln |C_1(y)|, \quad v(x, y) = \frac{C_1(y)}{x}.$$

Замечание. Общее решение уравнения (2) можно построить и таким образом:

$$xv_x + v = 0, \quad (xv)_x' = 0, \quad xv = C_1(y), \quad v(x, y) = \frac{C_1(y)}{x}.$$

- 3) Подставив найденное для v выражение в 1-е уравнение системы (1), получим уравнение:

$$u_y = \frac{C_1(y)}{x},$$

интегрируя которое по y , найдем

$$u(x, y) = \frac{C_2(y)}{x} + C_3(x).$$

где $C_2(y)$ и $C_3(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

2 способ

Если $x \neq 0$:

$$xu_{xy} + u_y = 0, \quad (xu_y)_x' = 0, \quad xu_y = C(y),$$

$$u_y = \frac{C(y)}{x}, \quad u(x, y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x},$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

- 4) Если $x = 0$, то для заданного уравнения будем иметь:

$$u_y(0, y) = 0, \quad u(0, y) = C = \text{const}.$$

Ответ: $u(x, y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x}, \quad x \neq 0.$

№ 7 (3): $u_{xy} + 5u_x = xy^2$

Этапы решения:

$$1) u_{xy} + 5u_x = xy^2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5v = xy^2. \end{cases}$$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5v = xy^2$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5v = 0$: $v(x, y) = e^{-5y}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x).$$

5	$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x)$
1	$(v_{\text{част}})'_y = 2yA(x) + B(x)$

y^2 :	$5A(x) = x,$	} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) = x/5, \\ B(x) = -2x/25, \\ D(x) = 2x/125. \end{array} \right.
y :	$5B(x) + 2A(x) = 0,$	
y^0 :	$5D(x) + B(x) = 0.$	

Результат: $v_{\text{част}}(x, y) = \frac{x}{5} \left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25} \right).$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5y}C(x) + \frac{x}{5} \left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25} \right).$$

Замечание. Общее решение уравнения (*) может быть построено методом вариации:

Решение неоднородного уравнения (*) будем искать в виде

$$v(x, y) = C(x, y)e^{-5y}. \quad (1)$$

Подставляя (1) в (*), получим

$$\begin{aligned} C'_y(x, y)e^{-5y} - 5C(x, y)e^{-5y} + 5C(x, y)e^{-5y} &= xy^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C'_y(x, y) &= xy^2e^{5y}. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$C(x, y) = \frac{x}{125}e^{5y}(25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x). \quad (2)$$

$$\int x \cdot y^2 \cdot e^{5y} dy \text{ simplify} \rightarrow \frac{x \cdot e^{5y} \cdot (25y^2 - 10y + 2)}{125}$$

Подставляя (2) в (1), получим общее решение уравнения (*):

$$v(x, y) = \frac{x}{125}(25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x)e^{-5y}.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x = v(x, y)$:

$$u(x, y) = e^{-5y}C_1(x) + \frac{x^2}{10}\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25}\right) + C_2(y), \text{ где } C_1(x) \text{ и } C_2(y)$$

– произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $u(x, y) = e^{-5y}C_1(x) + \frac{x^2}{10}\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25}\right) + C_2(y).$

Задания для самостоятельной работы

с. 55, № 7 (5): $u_{xy} + \frac{1}{6}u_x = 0$

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_y + \frac{1}{6}v = 0 \end{cases}$$

$$v(x, y) = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u_x = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}y} \int C(x)dx + C_1(y),$$

$u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}y}C_2(x) + C_1(y)$, где $C_1(y)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

с. 55, № 7 (7): $u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0$

Так как $y \neq 0$, то

$$u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0, \quad yu_{yy} + u_y = 0, \quad (yu_y)_y = 0, \quad yu_y = C_1(x), \quad u_y = \frac{C_1(x)}{y},$$

$u(x, y) = C_1(x)\ln|y| + C_2(x)$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Построить общее решение уравнения: $u_{xy} + 5xu_x = x + y$.

Этапы решения:

$$1) \quad u_{xy} + 5xu_x = x + y \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5xv = x + y. \end{cases}$$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5xv = x + y$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5xv = 0$: $v(x, y) = e^{-5yx}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y + B(x).$$

Результат: $v_{\text{част}}(x, y) = \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5yx} C(x) + \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x = v(x, y)$:

$$u(x, y) = \int C(x) e^{-5xy} dx + \frac{y \ln |x|}{5} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25x} + C_1(y), \quad x \neq 0,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Замечание. Если $x = 0$, то для уравнения (*) имеем:

$$v_y(0, y) = y \Rightarrow v(0, y) = \frac{y^2}{2} + C, \quad C - \text{произвольная константа.}$$

Возвращаясь к замене, получим уравнение:

$$u_x(0, y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Из него решение заданного уравнения при $x = 0$ путем интегрирования по x нельзя.



Домашнее задание

С. 55: № 6 (вычисление интегралов), № 7 (2,4,6,8).

Решите уравнение: $u_{xy} + xu_x = y, \quad u = u(x, y).$

§ 2, с. 48 – разбор примеров.