Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

№ 16

22.05.2024

Занятие № 15. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \; 0 < y < b, \tag{1}$$

$$u(0, y) = \mu(y), \; u(a, y) = \nu(y), \; 0 \le y \le b, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \tag{3}$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{5}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{6}$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \tag{7}$$

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad \left\| Y_k(y) \right\|^2 = \frac{b}{2}, \quad k = 1,2,\ldots$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \right) \sin\frac{k\pi y}{b}. \qquad (8)$$

Произвольные постоянные A_k и B_k найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k + B_k \right) \sin\frac{k\pi y}{b} = \mu(y),$$

$$u(a,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} \right) \sin\frac{k\pi y}{b} = \nu(y).$$

Разложив функции $\mu(y)$ и $\nu(y)$ в ряд по собственным $Y_k(y)$, получим:

$$\begin{cases} A_k + B_k = \dfrac{2}{b} \displaystyle\int_0^b \mu(y) \sin\frac{k\pi y}{b}\, dy \overset{]}{=} \mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} = \dfrac{2}{b} \displaystyle\int_0^b \nu(y) \sin\frac{k\pi y}{b}\, dy \overset{]}{=} \nu_k, \end{cases} \qquad (9)$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{\nu_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}}, \qquad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - \nu_k}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}}, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Подставив полученные выражения для A_k и B_k в ряд (8), получим

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b} + \mu_k\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi(a-x)}{b}}{\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}} \sin\frac{k\pi y}{b}.$$

С. 154, № 48

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = A\sin\frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{1}$$

Будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы:

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y), \tag{2}$$

когда функции $v(x,y)$ и $w(x,y)$ являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v(0,y) = v(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ v(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad v(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \end{cases} \tag{3}$$

$$
\begin{cases}
\Delta w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\
w(x,0) = w(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\
w(0,y) = A\sin\dfrac{\pi y}{b}, \quad w(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b.
\end{cases} \tag{4}
$$

Решение краевой задачи (3) можно найти в виде ряда по собственным функциям $X_k(x)$ (граничные условия однородные для x = 0 и x = a):

$$
v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}. \tag{5}
$$

Подставив (5) в уравнение Лапласа и граничные условия задачи (3) при y = 0 и y = b, получим следующие краевые задачи:

$$
\begin{cases}
Y_k''(y) - \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad k \in N, \\
Y_k(0) = \begin{cases} B, & k = 1, \\ 0, & k \ne 1, \end{cases} \qquad Y_k(b) = 0, \ k \in N.
\end{cases} \tag{6}
$$

решив которые, найдем $Y_k(y)$:

$$
Y_1(y) = B\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}}, \quad Y_k(y) = 0, \ \forall k \ne 1.
$$

Таким образом, для задачи (3) получаем следующее решение

$$
v(x,y) = B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}} \sin\frac{\pi x}{a}.
$$

Сравнивая условия задач (3) и (4), нетрудно установить, что решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x,y) = A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Ответ:

$$u(x,y) = B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} + A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0, \quad u_y(x,0) = f(x), \quad u_y(x,b) = g(x). \end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{1}$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (1) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

$$\|X_k(x)\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}. \quad (8)$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при $y = 0$ и $y = b$. Будем иметь:

$$u_y(x,0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right)\cos\frac{k\pi x}{a} = f(x),$$

$$u_y(x,b) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a} = g(x).$$

Разлагая функции $f(x)$ и $g(x)$ в ряд по собственным функциям $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}$, получим условия для нахождения коэффициентов A_0, A_k, B_k. Так как для определения A_0 имеем два уравнения:

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \quad A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a g(x)dx,$$

То в случае, если не будет выполнено условие

$$\boxed{\int_0^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx,} \tag{9}$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \tag{10}$$

а коэффициенты A_k и B_k $(k \neq 0)$ ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \\ \frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \end{cases} \tag{11}$$

$k = 1,2,\ldots$

Так как для каждого k определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.
Коэффициент B_0 ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

Вывод: *Задача Неймана имеет решение, если граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть записано в виде ряда (8), коэффициенты которого A_0, A_k, B_k $(k \neq 0)$ определяются условиями (10), (11), а B_0 – произвольная постоянная.*

Разобрать решение следующей задачи:

С. 154, № 49

$$\begin{cases} \Delta u = -2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a. \end{cases}$$

Решение краевой задачи ищется в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}. \qquad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение $u_{xx} + u_{yy} = -2$ и граничные условия $u(x,0) = u(x,b) = 0$ дает следующие краевые задачи для определения функций $Y_k(y)$:

$$Y_k''(y) - \left(\tfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = -\tfrac{4}{a}\int_0^a \sin\tfrac{k\pi x}{a}\,dx = \begin{cases} -\frac{8}{k\pi}, & k = 2n-1, \ n = 1,2,..., \\ 0, & k = 2n, \ n = 1,2,..., \end{cases}$$

$$Y_k(0) = Y_k(b) = 0, \quad k = 1,2,...$$

Очевидно, для четных k задачи Коши имеют нулевые решения. Решая задачи Коши для нечетных k, получим:

$$Y_k(y) = C_{1k} e^{\frac{k\pi y}{a}} + C_{2k} e^{-\frac{k\pi y}{a}} + \frac{8a^2}{(k\pi)^3},$$

где

$$C_{1k} = \frac{8a^2}{(k\pi)^3} \cdot \frac{e^{-\frac{k\pi b}{a}} - 1}{2\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}, \qquad C_{2k} = \frac{8a^2}{(k\pi)^3} \cdot \frac{1 - e^{\frac{k\pi b}{a}}}{2\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}}.$$

Подставив найденные $Y_k(y)$ в ряд (1), учитывая, что ненулевыми будут только слагаемые, соответствующие нечетным k, получим:

$$u(x,y)=\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi(b-y)}{a}+\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi y}{a}}{(2n-1)^3\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi b}{a}}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{a}.$$

С. 154, № 49 (второй способ)

Так как правая часть уравнения $f(x,y)=-2$ и граничные функции в условиях $u(0,y)=u(a,y)=0$ не зависят от y, то решение можно искать в виде:

$$u(x,y)=v(x)+w(x,y),$$

где функции $v(x)$ и $w(x,y)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} v''(x)=-2, \quad 0<x<a, \\ v(0)=v(a)=0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta w=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b, \\ w(0,y)=w(a,y)=0, \quad w(x,0)=w(x,b)=-v(x). \end{cases} \tag{2}$$

Решением граничной задачи (1) является функция: $v(x)=x(a-x)$.

Решение задачи (2) будем искать в виде ряда по собственным функциям :

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(y)\sin\frac{k\pi x}{a}. \tag{3}$$

Подстановка ряда (3) в уравнение $\Delta w=w_{xx}+w_{yy}=0$ и граничные условия $w(x,0)=w(x,b)=-v(x)=x(x-a)$, дает следующие краевые задачи для определения функций $Y_k(y)$:

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a x(x-a)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ \ldots$$

Завершить решение

29.05.2024

Занятие № 16. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в круге

с. 155, № 56 (1)

Общее решение уравнения Лапласа в круге:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)r^n$$

С. 156, № 59 (4) (условие разрешимости задачи Неймана)

Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u_r(R,\varphi) = f(\varphi), \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Условие разрешимости: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0.$

С. 156, № 58 (4)

$$\begin{cases} \Delta u = y, \quad 0 \le x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=R^2} = 1. \end{cases}$$

Перейдя к полярным координатам $u(x,y) \to v(r,\varphi),$ получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r,\varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = r\sin\varphi, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ v(R,\varphi) = 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями *r*:

$$v(r,\varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r)\cos k\varphi + B_k(r)\sin k\varphi) \tag{1}$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) \right) \cos k\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) \right) \sin k\varphi = r \cdot \sin\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$, получим:

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0,$$

$$A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad \forall k,$$

$$B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r,$$

$$B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad \forall k \ne 1.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k(R)\cos k\varphi + B_k(R)\sin k\varphi \right) \cos k\varphi = 1.$$

Отсюда получаем:

$$A_0(R)=1, \quad A_k(R)=B_k(R)=0 \quad \forall k \neq 0.$$

В результате получили следующие краевые задачи:

1) $A_0''(r)+\frac{1}{r}A_0'(r)=0, \quad 0<r<R, \quad A_0(R)=1,$
2) $A_k''(r)+\frac{1}{r}A_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}A_k(r)=0, \quad 0<r<R, \quad A_k(R)=0, \quad \forall k \neq 0,$
3) $B_1''(r)+\frac{1}{r}B_1'(r)-\frac{1}{r^2}B_1(r)=r, \quad 0<r<R, \quad B_1(R)=0,$
4) $B_k''(r)+\frac{1}{r}B_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}B_k(r)=0, \quad 0<r<R, \quad B_k(R)=0, \quad \forall k \neq 1.$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при $r = 0$.

Решение задачи 1): $A_0(r)\equiv 1.$

Уравнение задачи 3) является неоднородным уравнением Эйлера[1]:

$$r^2B_1''(r)+rB_1'(r)-B_1(r)=r^3. \qquad (2)$$

Общее решение соответствующего однородного имеет вид:

$$B_1^{одн}(r)=C_1r+C_2r^{-1}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$B_1^{ч}(r)=D\cdot r^3.$$

Подставляя выражение для $B_1^{ч}(r)$ в уравнение (2), найдем D = 1/8.

Таким образом, общим решением уравнения (2) является функция:

$$B_1(r)=C_1r+C_2r^{-1}+\tfrac{1}{8}r^3.$$

---

[1] О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «*Дифференциальные и интегральные уравнения*: Учебное пособие . Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014) http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1

Из условия ограниченности решения задачи 3) имеем $C_2 = 0$. Учитывая условие $B_1(R) = 0$, найдем $C_1 = -\frac{1}{8}R^2$. Таким образом, получили решение задачи 3):

$$B_1(r) = -\tfrac{1}{8}R^2 r + \tfrac{1}{8}r^3.$$

Решения задачи 1)-4) подставляем в ряд (1):

$$v(r,\varphi) = 1 + \left(-\tfrac{1}{8}R^2 r + \tfrac{1}{8}r^3\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x,y) = 1 + \tfrac{1}{8}\left(x^2 + y^2 - R^2\right)y.$$