Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

Занятие № 13

24.04.2024

Занятие № 12. Краевые задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона

Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой:

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad |x| < +\infty, \end{aligned} \qquad (1)$$

имеет решение, представимое с помощью **интеграла Пуассона**:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau, \qquad (2)$$

где функция

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \qquad (3)$$

является **фундаментальным решением** уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).

Заметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t) d\xi = 1.$ (4)

Задача 1

Построить решение краевой задачи для уравнения теплопроводности на прямой (задача Коши):

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx} + 8u_x + 3u + e^{-x}(1 + te^{-t}), \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = 2e^{-x}, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Решение.

1. **Приведение краевой задачи к виду (1).** Будем искать решение краевой задачи (1.1) в виде:

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t),$$

определив коэффициенты α и β так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало самой функции v и ее производной v_x .

√ **Для определения коэффициентов все слагаемые из правой части уравнения задачи (1.1) перенесем в левую часть**. Так как

$$\begin{array}{r|l} -3 & u(x,t) = e^{\alpha x+\beta t} v(x,t), \\ -8 & u_x = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v + v_x), \\ 1 & u_t = e^{\alpha x+\beta t}(\beta v + v_t), \\ -4 & u_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производная v_x входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l} v & e^{\alpha x+\beta t}(-3 - 8\alpha + \beta - 4\alpha^2) \\ v_x & e^{\alpha x+\beta t}(-8 - 8\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x+\beta t} \cdot 1 \\ v_{xx} & -4e^{\alpha x+\beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} -8-8\alpha=0, \\ -3-8\alpha+\beta-4\alpha^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1, \\ \beta=-1, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt}=4v_{xx}+t+e^t. \tag{1.2}$$

А для функции $u(x,t)$ будем иметь

$$u(x,t)=e^{-x-t}v(x,t). \tag{1.3}$$

Подставляя выражение (1.3) в начальное условие задачи (1.1), получим начальное условие для функции $v(x, t)$:

$$v(x,0)=2, \quad |x|<+\infty. \tag{1.4}$$

2. **Построение решения краевой задачи (1.2),(1.4) с помощью формулы (2),** учитывая свойство функции Грина (4):

$$v(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}2\cdot G(x,\xi,t)d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\tau+e^\tau)G(x,\xi,t-\tau)d\xi d\tau=$$

$$=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\varsigma,t)d\xi+\int\limits_0^t(\tau+e^\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)d\xi d\tau=$$

$$=2+\int\limits_0^t(\tau+e^\tau)d\tau=1+\frac{t^2}{2}+e^t.$$

Ответ: $u(x,t)=\left(1+e^t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-x-t}.$

Задача 2

Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} &u_t=u_{xx}+e^{-t}, \qquad |x|<+\infty, \quad t>0, \\ &u(x,0)=\cos x, \quad |x|<+\infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Зачастую вычисления, связанные с интегралом Пуассона, являются громоздкими. Для широкого класса функций $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ можно применить **метод частных решений**. Для этого заметим, что оператор теплопроводности $Lu = u_t - a^2 u_{xx}$ переводит (отображает), например, функции вида $g(t)\sin\lambda x$ и $g(t)\cos\lambda x$ в функции того же вида $h(t)\sin\lambda x$ и $h(t)\cos\lambda x$ соответственно.

Разобъем задачу (2.1) на две:

1) $$\begin{aligned} &v_t = v_{xx} + e^{-t}, \quad |x| < +\infty, \ \ t > 0, \\ &v(x,0) = 0, \quad |x| < +\infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

2) $$\begin{aligned} &w_t = w_{xx}, \quad |x| < +\infty, \ \ t > 0, \\ &w(x,0) = \cos x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Решение первой задачи (2.2) найдем с помощью формулы Пуассона (2):

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau = \int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = 1 - e^{-t}.$$

Решение второй задачи (2.3) будем искать в виде $w(x,t) = g(t)\cos x$, где функция $g(t)$ подлежит определению. Подставляя это выражение в уравнение и начальное условие задачи (2.3), будем иметь

$$g'(t)\cos x = -g(t)\cos x, \quad g(0)\cos x = \cos x.$$

Отсюда получаем задачу Коши

$$\begin{cases} g'(t) = -g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решением является функция $g(t) = e^{-t}$. Следовательно, $w(x,t) = e^{-t}\cos x$. Суммируя решения задач (2.2) и (2.3), получим решение задачи (2.1):

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = 1 - e^{-t} + e^{-t}\cos x.$$

Задача 3

Решить задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin 2x, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \qquad\qquad (3.1)$$
$$u(x,0) = \cos x, \quad |x| < +\infty.$$

Решение можно построить, разбив задачу (3.1) на две:

1) $$v_t = v_{xx} + e^{-t}\sin 2x, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \qquad\qquad (3.2)$$
$$v(x,0) = 0, \quad |x| < +\infty.$$

2) $$w_t = w_{xx}, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0, \qquad\qquad (3.3)$$
$$w(x,0) = \cos x, \quad |x| < +\infty.$$

Тогда решение задачи (3.1) найдем в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \qquad\qquad (3.4)$$

Обе задачи (3.2) и (3.3) можно решить, применив метод частных решений. Решение первой задачи ищем в виде $v(x,t) = h(t)\sin 2x$, а второй – $w(x,t) = g(t)\cos x.$.

Покажите, что функции $g(t)$ и $h(t)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} h'(t) = -4h(t) + e^{-t}, \\ h(0) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g'(t) = -g(t), \\ g(0) = 1, \end{cases}$$

соответственно. Найдите их решения.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t})\sin 2x + e^{-t}\cos x.$

Домашнее задание

1. Решить задачу Коши:

$$u_t = 4u_{xx} + \sin t \cdot \cos x, \qquad |x| < +\infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \cos x + \sin x, \qquad |x| < +\infty.$$

2. С. 174, № 72(2)

3. Решить примерный вариант контрольной работы № 3

КР-3: **15 мая**

08.05.2024

Занятие № 13. Свойства интеграла Пуассона

Свойство 1. Пусть функция $\Phi(x)$ определена, ограничена на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ и имеет на ней ограниченную производную, а линейная комбинация $\alpha\Phi'(x) - \beta\Phi(x)$ является нечетной относительно точки x = 0. Докажите, что функция $u(x,t)$, определяемая интегралом Пуассона:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) G(x,\xi,t)\, d\xi, \tag{1}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}, \tag{2}$$

удовлетворяет условию:

$$\left(\alpha u_x(x,t) - \beta u(x,t)\right)\Big|_{x=0} = 0.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для функции $G(x,\xi,t)$ справедливо следующее:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad G(x,\xi,t)\xrightarrow{|\xi|\to\infty}0.$$

В силу наложенных на $\Phi(x)$ условий функцию (1) можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Поэтому

$$\alpha u_x(x,t)-\beta u(x,t)=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}G_x(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi-\beta\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi=$$

$$=-\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}G_\xi(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi-\beta\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi.$$

Применив к первому интегралу привило интегрирования по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G_\xi(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi=G(x,\xi,t)\Phi(\xi)\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\Phi'(\xi)d\xi=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\Phi'(\xi)d\xi.$$

Внеинтегральные слагаемые при $\xi\to\pm\infty$ обращаются в ноль в силу ограниченности $\Phi(x)$ и свойства функции $G(x,\xi,t)$.

В результате получаем

$$\alpha u_x(x,t)-\beta u(x,t)=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\Phi'(\xi)d\xi-\beta\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)\Phi(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,\xi,t)(\alpha\Phi'(\xi)-\beta\Phi(\xi))d\xi.$$

Так как подынтегральная функция при $x = 0$ является нечетной, то интеграл при $x = 0$ на симметричном промежутке равен 0, т. е. будем иметь:

$$\left(\alpha u_x(x,t)-\beta u(x,t)\right)\Big|_{x=0}=0.$$

Можно ли утверждать, что если в (1) функция $\Phi(x)$ является нечетной, то $u(0,t)=0$, а если $\Phi(x)$ четная функция, то $u_x(0,t)=0$?

Свойство 2. Пусть функция $\Phi(x)$ определена и непрерывна на прямой, является нечетной относительно точки x = 0 и 2l-периодичной. Докажите, что функция $u(x,t)$, определяемая интегралом Пуассона (1), удовлетворяет условиям: $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Доказательство. Так как функция $G(0,\xi,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}$ является четной относительно точки ξ=0, то произведение $\Phi(\xi)G(0,\xi,t)$ - функция нечетная относительно точки ξ=0. Тогда

$$u(0,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)G(0,\xi,t)d\xi=0$$

как интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке.
Для $u(l,t)$ справедливы следующие преобразования для интеграла:

$$u(l,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)G(l,\xi,t)d\xi.$$

Так как $G(l,\xi,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4a^2t}}=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(0-(\xi-l))^2}{4a^2t}}=G(0,\xi-l,t),$ то
Выполнив замену $\eta=\xi-l,$ получим

$$u(l,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta+\int\limits_{0}^{+\infty}\Phi(\eta+l)G(0,\eta,t)d\eta=$$

$$= \int_0^{+\infty} \Phi(-\eta + l) G(0, -\eta, t) d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l) G(0, \eta, t) d\eta =$$

Так как $\Phi(-\eta + l) = -\Phi(\eta - l), \quad G(0, -\eta, t) = G(0, \eta, t)$, то

$$= -\int_0^{+\infty} \Phi(\eta - l) G(0, \eta, t) d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l) G(0, \eta, t) d\eta =$$

Так как $\Phi(\eta - l) = \Phi(\eta - l + 2l) = \Phi(\eta + l)$, то

$$= -\int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l) G(0, \eta, t) d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l) G(0, \eta, t) d\eta = 0.$$

Домашнее задание

Решить примерный вариант [контрольной работы № 3]

КР-3: **15 мая**

Разобрать решение следующей задачи

Задача

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \geq 0, \qquad (3)$$

Граничная функция $\mu(t)$ является непрерывной, ограниченной и $\mu(0) = 0$. (4)

Решение:

Будем искать решение (1)–(3) задачи в виде

$$u(x,t) = \mu(t) + w(x,t), \tag{5}$$

где функция $w(x,t)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} - \mu'(t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ w(x,0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Так как фундаментальным решением уравнения теплопроводности на полупрямой (функцией Грина) с граничным условием 1-го рода является функция[1]:

$$G_1(x,\xi,t) = G(x,\xi,t) - G(x,-\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}},$$

то для решения задачи (6) имеем

$$w(x,t) = -\int_0^t \int_0^{+\infty} \mu'(\tau) G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau = -\int_0^t \mu'(\tau) \int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau. \tag{7}$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$\int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t-\tau)\, d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi.$$

Выполнив для 1-го интеграла замену $z = \dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$, а для второго – $z = \dfrac{x+\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$, получим

[1] См. лекцию на тему «Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения»

$$\int_0^{+\infty} G_1(x,\xi,t-\tau)d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-x/2a\sqrt{t-\tau}}^{+\infty} e^{-z^2}dz - \int_{x/2a\sqrt{t-\tau}}^{+\infty} e^{-z^2}dz \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2a\sqrt{t-\tau}}^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz.$$

Тогда

$$w(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu'(\tau) \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dzd\tau.$$

Применив правило интегрирования по частям, получим

$$w(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu(\tau)\int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \mu(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2}dz \right)d\tau \right) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\mu(t)\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz - \frac{1}{4a}\int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau \right) =$$

$$= -\mu(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Подставив построенное для $w(x,t)$ выражение в (5), получим решение задачи (1)-(3):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau. \qquad (8)$$

Покажем, что $\lim_{x\to 0} u(x,t) = \mu(t)$.

В интеграле (8) выполним замену $z = \dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$.

Так как

$$dz = \frac{x}{4a\sqrt{(t-\tau)^3}}\,d\tau \quad \text{и} \quad \tau = t - \frac{x^2}{4a^2z^2},$$

то будем иметь

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/2a\sqrt{t}}^{+\infty} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2z^2}\right) \exp\left(-z^2\right) dz.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \mu(t) \exp\left(-z^2\right) dz. = \mu(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-z^2\right) dz. = \mu(t).$$

Домашнее задание

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad t \ge 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \ge 0,$$

Граничная функция μ(t) является непрерывной, ограниченной и $\mu(0) = 0$.