Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

10.04.23, 17.04.23

Занятие № 10, 11

Смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности

Краевая задача, описывающая распространение тепла в однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью при условии, когда на концах стержня происходит теплообмен со средой с заданной температурой (пусть A – температура окружающей среды с торцевого сечения $x = 0$, а B – с торцевого сечения $x = l$):

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \; t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) - h(u(0,t) - A) = u_x(l,0) + h(u(l,t) - B) = 0, \quad t \ge 0, \\ h = const > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \tag{4}$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям:

$$\begin{cases} v'(0) - hv(0) = -Ah, \\ v'(l) + hv(l) = Bh. \end{cases} \tag{5}$$

Функция, удовлетворяющая условиям (5), может быть найдена в виде:

$$v(x) = \alpha x + \beta, \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим систему линейных уравнений, решая которую найдем:

$$\alpha = \frac{h(B-A)}{2+hl}, \quad \beta = \frac{B+A+Ahl}{2+hl}. \tag{7}$$

Зная $v(x)$, построим краевую задачу для определения функции $w(x,t)$. Подставив (4) в (1)–(3), получим:

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \ \ t > 0, \tag{8}$$

$$w_x(0,t) - hw(0,t) = w_x(l,0) + hw(l,t) = 0, \ \ t \geq 0, \tag{9}$$

$$w(x,0) = \varphi(x) - \alpha x - \beta, \ \ 0 \leq x \leq l. \tag{10}$$

Будем искать решение краевой задачи (8)–(10) в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x), \tag{11}$$

где собственные функции $X_k(x)$ являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (Ш-Л):

$$\begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Для нахождения всех значений параметра c, при которых задача (12) имеет ненулевое решение, рассмотрим три случая:

1) Если $c = 0$, то общее решение уравнения задачи Ш-Л (12):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = A - hB = 0, \\ X'(l) + hX(l) = A + h(Al + B) = 0. \end{cases}$$

Для определителя матрицы системы имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -h \\ 1+hl & h \end{vmatrix} = h(2+hl) \neq 0.$$

Следовательно, что A = B = 0. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение задачи (12).

Вывод: собственное значения задачи Ш-Л (12) не могут быть равным 0.

2) Если c < 0 (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = \lambda(A - B) - h(A + B) = 0, \\ X'(l) + hX(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) + h(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\lambda - h) - B(\lambda + h) = 0, \\ A(\lambda + h)e^{\lambda l} - B(\lambda - h)e^{-\lambda l} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Полученная система (13) имеет ненулевое решение (A, B), если определитель матрицы системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda - h & -(\lambda + h) \\ (\lambda + h)e^{\lambda l} & -(\lambda - h)e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda^2 + h^2)(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) + 2\lambda h(e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) = 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) не имеет вещественных корней, отличных от 0, так как при $\lambda < 0$ левая часть уравнения меньше 0, а при $\lambda > 0$ – положительна. Значит, определитель матрицы системы (13) отличен от 0 при любых $\lambda \neq 0$, и система (13) имеет нулевое решение $A = B = 0$. Следовательно, задача (12) имеет только нулевое решение.

Вывод: собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л (12) не могут быть отрицательными.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (12):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничным условиям задачи (12). Будем иметь:

$$\begin{cases} \lambda B - hA = 0, \\ \lambda(-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l) + h(A\cos\lambda l + B\sin\lambda l) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Выясним, существуют ли такие $\lambda \neq 0$, при которых определитель матрицы системы (15) равен 0:

$$\begin{vmatrix} -h & \lambda \\ -\lambda\sin\lambda l + h\cos\lambda l & \lambda\cos\lambda l + h\sin\lambda l \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \left(\lambda^2 - h^2\right)\sin\lambda l - 2\lambda h\cos\lambda l = 0 \iff \operatorname{ctg}\lambda l = \frac{\lambda^2 - h^2}{2\lambda h} \tag{16}$$

Заметим, что, если λ^* является корнем уравнения (16), то и $(-\lambda^*)$ также является его корнем. Тогда, так как $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$, то для нахождения собственных значений следует выяснить, сколько положительных корней имеет уравнение (16). Графическое решение уравнения (16) (см. рис. 1) позволяет сделать следующий вывод:

существует бесконечное счетное множество положительных корней уравнения (16) λ_k, $k \in N$.

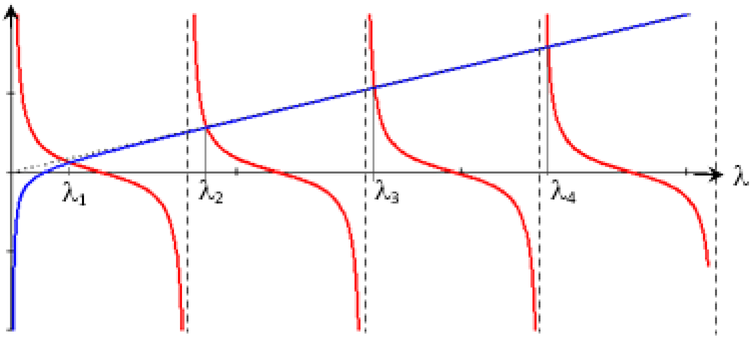

Рис. 1. Графическое решение уравнения (16)

17.04.2023

Занятие № 11

Для каждого $\lambda = \lambda_k$ система (15) имеет ненулевое решение (A_k, B_k), для которого

$$A_k = \frac{\lambda_k}{h} B_k, \quad \forall B_k \neq 0.$$

Следовательно, собственные значения задачи Ш-Л (12):

$$c_k = \lambda_k^2,$$

где λ_k – положительные корни уравнения (16), и соответствующие им собственные функции:

$$X_k(x)=\frac{\lambda_k}{h}B_k\cos\lambda_k x+B_k\sin\lambda_k x,\quad \forall B_k\neq 0.$$

Пусть $B_k=h\ \ \forall\ k\in\mathrm{N}$.

Вывод: Задача Ш-Л имеет решение:

$$X_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x,\quad k=1,2,..., \tag{17}$$

где λ_k – положительные корни уравнения

$$ctg\lambda l=\frac{\lambda^2-h^2}{2h\lambda}. \tag{18}$$

Подставляя ряд (11) в (8) и (10), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(t)+a^2\lambda_k^2T_k(t)\right)X_k(x)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)X_k(x)=\varphi(x)-\beta x-\beta=\varphi_1(x).$$

Тогда функции $T_k(x)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$T_k'(t)+a^2\lambda_k^2T_k(t)=0,\quad T_k(0)=\gamma_k,\quad t>0,\quad k\in N, \tag{19}$$

где

$$\gamma_k=\frac{1}{\left\|X_k(x)\right\|^2}\int_0^l\varphi_1(\xi)X_k(\xi)d\xi,\quad k\in N. \tag{20}$$

Задачи Коши (19) имеют решения:

$$T_k(t)=\gamma_k e^{-\left(a\lambda_k\right)^2t},\quad k\in N. \tag{21}$$

Подставив (17) и (21) в (11), получим решение задачи (8)-(10):

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k e^{-\left(a\lambda_k\right)^2t}\left(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x\right). \tag{22}$$

Замечание. **Фундаментальным решением** задачи (8)-(10) (функцией Грина) является функция:

$$G(x,\xi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\|X_k(x)\|^2}e^{-(a\lambda_k)^2 t}\,X_k(x)X_k(\xi).$$

Вывод: задача (1)–(3) имеет решение

$$u(x,t)=\alpha x+\beta+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\left(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x\right),$$

где α,β и γ_k определяются по формулам (7) и (20).

Домашнее задание

1) Найти $\|X_k(x)\|^2$ для собственных функций (17). Полученное выражение преобразуйте к виду, не содержащему тригонометрических функций.

2) С. 153, № 41(3).

3) Примерный вариант КР-3