**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

**27.03.2023**

**Занятие № 8**

## Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

**Гл. 5, § 4, с. 150: № 31 (1)**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Ненулевое решение краевой задачи будем искать в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

Подставив (4) в уравнение (1) и разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Равенство должно выполняться при любых $x \in (0,\ l)$ и $t > 0$, что возможно, если оба отношения равны некоторой константе, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -c, \quad c = const, \tag{5}$$

Откуда получаем два дифференциальных уравнения с параметром $c$:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$T''(t) + ca^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \tag{7}$$

Подставляя (4) в граничные условия (2):

$$X'(0)T(t) = X'(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$

и, учитывая, что $T(t)$ не может быть тождественно равной 0, получим

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (6) и условия (8) дают соответствующую краевой задаче задачу Штурма-Лиувилля.

Решение задачи Ш-Л (см. Занятие № 5, № 23(г)):

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad \| X_n \|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Остается для каждого значения параметра $c = c_k$ найти общее решение уравнения (7). Оно имеет следующий вид:

$$T_k(t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t, & k = 0, \\ A_k \cos\dfrac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\dfrac{ak\pi t}{l}, & k \neq 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $A_k$ и $B_k$ – произвольные $const$.

Согласно методу Фурье, решение заданного уравнения (1) запишем в виде ряда $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$:

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}. \tag{10}$$

Неизвестные константы $A_k$ и $B_k$ найдем, подчинив ряд (10) начальным условиям (3):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} = x, \\ u_t(x,0) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты $A_k$ и $B_k$ являются коэффициентами разложений функций $x$ и 1 соответственно в ряды по собственным функциям задачи Ш-Л:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{l}{2}, \quad A_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k=2n, \\ \dfrac{-4l}{(k\pi)^2}, & k=2n-1, \end{cases}$$

$$n = 1,2,\dots, \quad B_0 = 1, \quad B_k = 0, \quad k = 1,2,\dots$$

Таким образом, решением задачи (1) – (3) является функция:

$$u(x,t)=\frac{l}{2}+t+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^k-1)}{k^2}\cos\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

**Ответ:**

Выражение для $u(x\ ,t)$ может быть записано и в следующем виде:

$$u(x,t)=\frac{l}{2}+t-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{a(2n-1)\pi t}{l}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}. \qquad (*)$$

**Домашнее задание**

1) с.132, № 25,
2) дать графическую иллюстрацию решения задачи № 31(1) – формула (*),
3) с. 150, № 31 (2).

**3.04.2023**

**Занятие № 9**

**Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа**

**Примерный вариант контрольного задания**

В области $0 < x < \pi$, $t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt}-4u_{xx}+16u_x+4u_t-4(\cos t+4)=e^{2x}\sin 5x-\sin t,$$

$$u(0,t)=\sin t, \qquad u(\pi,t)=\pi+\sin t,$$

$$u(x,0)=x+2e^{2x}\cos x\sin 5x, \qquad u_t(x,0)=1.$$

Решение задачи можно искать в виде:

$u(x,t)=x+\sin t+w(x,t)$, | (избавляемся от неоднородности в граничных условиях) | (1)

где $w(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$w_{tt}-4w_{xx}+16w_x+4w_t=e^{2x}\sin 5x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0,\tag{2}$$
$$w(0,t)=w(\pi,t)=0,\quad t\ge 0,\tag{3}$$
$$w(x,0)=2e^{2x}\cos x\sin 5x,\qquad w_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le \pi.\tag{4}$$

Уравнение краевой задачи можно упростить, если искать его решение в виде

$$w(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}v(x,t),$$

определив коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало ее производных по переменным $x$ и $t$.

Так как

$$\begin{array}{r|l}
0 & w(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}v(x,t),\\
16 & w_x=e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v+v_x),\\
4 & w_t=e^{\alpha x+\beta t}(\beta v+v_t),\\
-4 & w_{xx}=e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v+2\alpha v_x+v_{xx}),\\
1 & w_{tt}=e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v+2\beta v_t+v_{tt}),
\end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l}
v & e^{\alpha x+\beta t}(16\alpha+4\beta-4\alpha^2+\beta^2)\\
v_x & e^{\alpha x+\beta t}(16-8\alpha)\\
v_t & e^{\alpha x+\beta t}(4+2\beta)\\
v_{xx} & -4e^{\alpha x+\beta t}\\
v_{tt} & e^{\alpha x+\beta t}
\end{array}$$

Тогда, выбрав $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы

$$\begin{cases}16-8\alpha=0,\\ 4+2\beta=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=-2,\end{cases}$$

(при этом $16\alpha+4\beta-4\alpha^2+\beta^2=12$)

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} - 4v_{xx} + 12v = e^{2t}\sin 5x. \qquad (6)$$

А

$$w(x,t) = e^{2x-2t}v(x,t). \qquad (7)$$

Подставляя выражение (7) в условия (3) и (4), получим условия для функции $v(x, t)$:

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \qquad (8)$$

$$v(x,0) = 2\cos x \sin 5x, \qquad v_t(x,0) = 4\cos x \sin 5x, \qquad 0 \le x \le \pi. \qquad (9)$$

Будем искать решение краевой задачи (6), (8), (9) в виде ряда по собственным функциям:

$$v(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x) = \sin kx,\ k \in N,$ являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$
$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

и, следовательно,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin kx. \qquad (10)$$

Подставляя ряд (10) в (6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t)\right)\sin kx = e^{2t}\sin 5x.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = \begin{cases} e^{2t}, & k = 5, \\ 0, & k \ne 5. \end{cases}$$

Подставляя ряд (10) в начальные условия (9), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin kx = 2\cos x \sin 5x = \sin 6x + \sin 4x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 4,6, \\ 0, & k \ne 4,6, \end{cases}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}'(0)\sin kx = 4\cos x \sin 5x = 2\sin 6x + 2\sin 4x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_k{}'(0) = \begin{cases} 2, & k = 4,6, \\ 0, & k \neq 4,6. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

1) $\begin{cases} T_4''(t) + 76T_4(t) = 0, & t > 0, \\ T_4(0) = 1, \quad T_4{}'(0) = 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} T_5''(t) + 112T_5(t) = e^{2t}, & t > 0, \\ T_5(0) = 0, \quad T_5{}'(0) = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} T_6''(t) + 156T_6(t) = 0, & t > 0, \\ T_6(0) = 1, \quad T_6{}'(0) = 2. \end{cases}$

4) $\forall\ k \neq$ 4,5,6:

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

**Задачи имеют следующие решения:**

$$\left.\begin{aligned} &T_4(t) = \cos(\sqrt{76}t) + \frac{2}{\sqrt{76}}\sin(\sqrt{76}t); \\ &T_5(t) = \frac{1}{116}\left( e^{2t} - \cos(\sqrt{112}t) - \frac{2}{\sqrt{112}}\sin(\sqrt{112}t) \right); \\ &T_6(t) = \cos(\sqrt{156}t) + \frac{2}{\sqrt{156}}\sin(\sqrt{156}t); \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$T_n(t) = 0, \ \forall n \neq 4,5,6.$$

В результате будем иметь:

$$v(x,t) = T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x \quad \to \quad (8) \quad \to$$

$$w(x,t) = e^{2x-2t}v(x,t) = e^{2x-2t}(T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x) \ \to (1):$$

**Ответ:**

$$u(x,t) = x + \sin t + w(x,t) =$$
$$= x + \sin(t) + e^{2x-2t}(T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x),$$

где функции $T_4(t)$, $T_5(t)$, $T_6(t)$ определяются по формулам (11).

**Замечание**. Функцию $h(x, t)$, удовлетворяющую граничным условиям:

$$\begin{cases} \alpha_1 h_x(0,t) + \beta_1 h(0,t) = 0, \\ \alpha_2 h_x(l,t) + \beta_2 h(l,t) = 0, \end{cases}$$

можно найти в виде:

1) $h(x,t) = A(t)x + B(t)$, если $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$,
2) $h(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$, если $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

**Домашнее задание**

Домашняя контрольная работа не тему «**Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа**»
Срок выполнения:
группа **22304** - **17 апреля,**
группа **22303 – 27 апреля**

Варианты заданий