Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

6.03.2023

Занятие № 5

Задача Штурма-Лиувилля

При каких значениях параметра c задача

$$X''(x)+cX(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{1}$$

$$a_1X'(0)+b_1X(0)=0,\quad a_2X'(l)+b_2X(l)=0,$$
$$a_i,\ b_i\in R,\quad a_i^2+b_i^2\neq 0,\quad i=1,2. \tag{2}$$

имеет ненулевое решение.

Собственные значения задачи Ш-Л являются **вещественными**.

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (а): $X(0)=X(l)=0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если с < 0 (пусть $c=-\lambda^2$, $\lambda\neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X(0)=A+B=0, \\ X(l)=Ae^{\lambda l}+Be^{-\lambda l}=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем A = B = 0, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если с = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x)=Ax+B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X(0) = B = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = Al + B = 0.$$

Откуда получаем, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X(0) = A = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X(l) = B\sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin\lambda l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda l = \pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, нашли собственные значения[1]:

$$c_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n \in N,$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \forall B_n \neq 0.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, отличаются на постоянный множитель.

Пусть $B_n = 1 \ \ \forall n \in N.$ Тогда $\| X_n \|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{2}.$

Ортогональность собственных функций.

$$(X_k, X_n) = \int\limits_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\cos\frac{(k-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(k+n)\pi x}{l}\right)dx = 0 \quad \forall k \neq n.$$

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

---

[1] При отрицательных значениях n не будут получены новые значения с.

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \| X_n \|^2 = \frac{l}{2}.$$

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (г): $X'(0) = X'(l) = 0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если с < 0 (пусть с = $-\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X'(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = B, \\ B(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем A = B = 0, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если с = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \quad \text{и} \quad X'(l) = A = 0.$$

Получаем, что при с = 0 существует ненулевое решение $X(x) = B$, когда B – $\forall$ const ≠ 0. Пусть $B = 1$.

$$c_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad \| X_0 \|^2 = \int_0^l 1\, dx = l.$$

3) Если с > 0 (пусть с = λ^2, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при x = 0:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X'(l) = A\lambda \sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin \lambda l = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda l = \pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, учитывая условие $\lambda \neq 0$, нашли собственные значения[2]:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \; n \in N,$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \;\; \forall A_n \neq 0.$$

Пусть $A_n = 1 \;\forall n \in N$, тогда $\| X_n \|^2 = \int\limits_0^l \cos^2 \frac{n\pi\pi}{l}\, dx = \frac{l}{2}.$

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \;\; X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0,1,2,..., \;\; \| X_n \|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \frac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

С. 127, Пример 1;
с. 131, № **23** (б) (+ проверить свойство ортогональности собственных функций, вычислить нормы собственных функций).

[2] При отрицательных значениях *n* не будут получены новые значения с.