Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

20.03.2023

Занятие № 7

Задача Коши для волнового уравнения на прямой. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad |x| < +\infty. \tag{2}$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{3}$$

Задача 1

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_x + 2u_t - 3u = e^{2x-t} x \sin t, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = e^{2x}\sin x, \quad u_t(x,0) = e^{2x}(\cos x - \sin x), \quad |x| < +\infty. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t.

Так как

$$
\begin{array}{r|l}
- & u(x,t) = e^{\alpha x+\beta t} v(x,t), \\
4 & u_x = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v + v_x), \\
2 & u_t = e^{\alpha x+\beta t}(\beta v + v_t), \\
-1 & u_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\
1 & u_{tt} = e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}),
\end{array}
$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$
\begin{array}{r|l}
v & e^{\alpha x+\beta t}(-3+4\alpha+2\beta-\alpha^2+\beta^2) \\
v_x & e^{\alpha x+\beta t}(4-2\alpha) \\
v_t & e^{\alpha x+\beta t}(2+2\beta) \\
v_{xx} & -e^{\alpha x+\beta t} \\
v_{tt} & e^{\alpha x+\beta t}
\end{array}
$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$
\begin{cases} 4-2\alpha = 0, \\ 2+2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -1, \end{cases}
$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$
v_{tt} = v_{xx} + x\sin t. \tag{6}
$$

А

$$
u(x,t) = e^{2x-t} v(x,t), \tag{7}
$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} &v(x,0) = \sin x, \\ &v_t(x,0) = \cos x - \sin x + v(x,0) = \cos x. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера (при этом $a = 1$):

$$v(x,t) = \frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos\xi d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\xi\sin\tau\ d\xi\ d\tau =$$

$$= \frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2} + \frac{\sin(x+t)-\sin(x-t)}{2} = \sin(x+t).$$

Так как

$$\int_{x-t}^{x+t}\cos\xi d\xi = \sin(x-t)+\sin(x+t),$$

$$\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\xi\sin\tau\ d\xi\ d\tau = \int_0^t\left((x+t-\tau)^2-(x-t+\tau)^2\right)\sin\tau d\tau =$$

$$= 4x\int_0^t(t-\tau)\sin\tau d\tau = 4x(t-\sin t),$$

по получим

$$v(x,t) = \sin(x+t) + x(t-\sin t).$$

Подставив полученное выражение для $v(x,t)$ в (7), найдем решение задачи (4)-(5):

$$\boxed{u(x,t) = e^{2x-t}(\sin(x+t)+x(t-\sin t)).}$$

Гл. 5, § 2, с. 124: № 17 (в)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x,t)\equiv 0$):

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$-периодические функции, то

$$u(0,t)=u(l,t)=0.$$

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

1) $$u(0,t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{-\varphi(at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=0.$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

2) $$u(l,t)=\frac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

По свойствам нечетности и $2l$-периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at)=-\varphi(-l+at)=-\varphi(-l+at+2l)=-\varphi(l+at)\,.$$

Разбив интеграл на два:

$$\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi=\int_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi+\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и $2l$-периодичности функции ψ:

$$\int_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi=\left[\xi=-\eta\right]=-\int_{-l+at}^{-l}\psi(-\eta)d\xi=\int_{-l+at}^{-l}\psi(\eta)d\eta=\int_{-l+at}^{-l}\psi(\eta+2l)d\eta=$$

$$=\left[\xi=\eta+2l\right]=\int_{l+at}^{l}\psi(\xi)d\xi=-\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

Таим образом, получаем:

$$u(l,t)=\frac{-\varphi(l+at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(-\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi+\int_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi\right)=0.$$

Домашнее задание

С. 123-124: № 13(3), № 18.