



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

13.02.2023

**Занятие № 2. Уравнения в частных производных 1-го порядка.
Построение общего решения методом характеристик.**

Гл. 2, § 3, с. 64

Построить общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду в указанной области изменения независимых переменных, считая $u = u(x, y)$.

№ 14 (1). $uy_x - xy_y = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

2) Решая уравнение характеристик методом разделения переменных, найдем его первый интеграл $x^2 + y^2 = C$.

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x^2 + y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0$, то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = 2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$yv_\eta = 0 \rightarrow v_\eta = 0.$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = 0 \rightarrow v(\xi, \eta) = C(\xi),$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x, y) = C(x^2 + y^2),$$

где $C(\cdot)$ – произвольная дифференцируемая функция.

№ 14 (7). $\frac{1}{x}u_x + \frac{1}{y}u_y = \frac{u}{y^2}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1/x} = \frac{dy}{1/y} \Leftrightarrow xdx - ydy = 0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x^2 - y^2 = C$.

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0$, то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$\frac{1}{x}v_\eta = \frac{v}{y^2} \rightarrow v_\eta = \frac{xv}{y^2} \xrightarrow{x=\eta, y^2=\eta^2-\xi} v_\eta = \frac{\eta v}{\eta^2 - \xi}.$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = \frac{\eta v}{\eta^2 - \xi} \rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \xi} + \ln |C(\xi)| \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln |v| = \frac{1}{2} \ln |\eta^2 - \xi| + \ln |C(\xi)| \rightarrow v(\xi, \eta) = C(\xi) \sqrt{|\eta^2 - \xi|},$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x, y) = v(x^2 - y^2, x) = C(x^2 - y^2) \sqrt{|x^2 - (x^2 - y^2)|} =$$

$$= C(x^2 - y^2) \sqrt{y^2} = |y| C(x^2 - y^2).$$

Учитывая произвольность функции $C(\cdot)$, общее решение заданного уравнения можно записать следующим образом:

$$u(x, y) = yC(x^2 - y^2).$$

№ 13 (1): Принимая ξ и η за новые переменные, преобразовать уравнение $xu_x + \sqrt{1+y^2} \cdot u_y = xy$, если $\xi = \ln x$, $\eta = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Построим выражения для производных функции $u(x, y)$ при переходе к новым переменным $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{x} v_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right) v_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} v_\eta.$$

Подставив выражения для производных в уравнение

$$xu_x + \sqrt{1+y^2} \cdot u_y = xy,$$

учитывая связь между старыми и новыми переменными:

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^\xi, \\ y = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} = \operatorname{sh} \eta \end{cases}$$

получим: $v_\xi + v_\eta = e^\xi \operatorname{sh} \eta$.

$$u_x + u_y = e^x \operatorname{sh} y$$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} \Leftrightarrow dx - dy = 0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x - y = C$.

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x - y, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -v_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$v_\eta = e^x \operatorname{sh} y \xrightarrow{x=\eta, y=\eta-\xi} v_\eta = e^\eta \operatorname{sh}(\eta - \xi).$$

4) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = e^\eta \operatorname{sh}(\eta - \xi) \rightarrow v(\xi, \eta) = \int e^\eta \operatorname{sh}(\eta - \xi) d\eta + C(\xi).$$

Так как

$$\int e^\eta \operatorname{sh}(\eta - \xi) d\eta = \frac{1}{2} \int (e^{2\eta - \xi} - e^\xi) d\eta = \frac{1}{4} e^{2\eta - \xi} - \frac{1}{2} \eta e^\xi,$$

то получим

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{4} e^{2\eta - \xi} - \frac{1}{2} \eta e^\xi + C(\xi).$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x, y) = v(x - y, x) = \frac{1}{4} e^{x+y} - \frac{1}{2} x e^{x-y} + C(x - y).$$



Домашнее задание

С. 64: №№ 12, 13(2), 14 (2, 4).

20.02.2023

Занятие № 3

Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения. Задача Коши

С. 65, № 17 (3): $xu_x + yu_y = 2xy, \quad u(x, x) = x^2.$

1) Будем рассматривать уравнение, считая $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Решая уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

найдем его первый интеграл $x/y = C$. Это уравнение определяет на плоскости семейство характеристик, которые являются прямыми ($x = Cy$).

2) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x/y, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 1/y & -x/y^2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = x/y^2 \neq 0$, то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{y} v_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -\frac{x}{y^2} v_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение приведем его к каноническому виду:

$$xv_\eta = 2xy \xrightarrow{x=\eta, y=\eta/\xi} v_\eta = \frac{2\eta}{\xi}.$$

3) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

$$v_\eta = \frac{2\eta}{\xi} \rightarrow v(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{\xi} + F(\xi),$$

где $F(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

4) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x, y) = xy + F\left(\frac{x}{y}\right),$$

где $F(\cdot)$ - произвольная дифференцируемая функция.

5) Задача Коши. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Для нахождения функции F используем условие $u(x, x) = x$:

$$u(x, x) = F(1) + x^2 = x^2 \Rightarrow F(1) = 0.$$

Решение задачи Коши: $u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right) + xy$, где F - произвольная дифференцируемая функция, для которой $F(1)=0$.

Замечание. Неоднозначность решения объясняется тем, что условие задано на одной из характеристик ($y = x$). Для сравнения найдем решение при условии $u(x, x^2) = x^2$. Так как

$$u(x, x^2) = F(1/x) + x^3 = x^2 \Rightarrow F(1/x) = x^2 - x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x-1}{x^3},$$

то решение задачи Коши получим следующее:

$$u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right) + xy = \frac{x/y - 1}{x^3/y^3} + xy = \frac{xy^2 - y^3}{x^3} + xy = \frac{y(xy - y^2 + x^4)}{x^3}.$$



Домашнее задание

С. 65: № 17(1, 6).