



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---



**25.05.2023**

### **Занятие № 15. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье**

---

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (1)$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(a, y) = \nu(y), \quad 0 \leq y \leq b, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (3)$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

---

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (5)$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \quad (6)$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \quad (7)$$

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad \|Y_k(y)\|^2 = \frac{b}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для каждого значения параметра  $c = c_k$  общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (8)$$

Произвольные постоянные  $A_k$  и  $B_k$  найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{k\pi y}{b} = \mu(y),$$

$$u(a, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} \right) \sin \frac{k\pi y}{b} = \nu(y).$$

Разложив функции  $\mu(y)$  и  $\nu(y)$  в ряд по собственным  $Y_k(y)$ , получим:

$$\begin{cases} A_k + B_k = \frac{2}{b} \int_0^b \mu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} = \frac{2}{b} \int_0^b \nu(y) \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \nu_k, \end{cases} \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{v_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - v_k}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставив полученные выражения для  $A_k$  и  $B_k$  в ряд (8), получим

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} + \mu_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi y}{b}.$$

**Разобрать решения следующих задач:**

### С. 154, № 48

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы:

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (2)$$

когда функции  $v(x, y)$  и  $w(x, y)$  являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ v(0, y) = v(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ v(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, & v(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ w(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, & w(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (4)$$

Решение краевой задачи (3) можно найти в виде ряда по собственным функциям  $X_k(x)$  (граничные условия однородные для  $x = 0$  и  $x = a$ ):

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (5)$$

Подставив (5) в уравнение Лапласа и граничные условия задачи (3) при  $y = 0$  и  $y = b$ , получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, & 0 < y < b, & k \in N, \\ Y_k(0) = \begin{cases} B, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} & Y_k(b) = 0, & k \in N. \end{cases} \quad (6)$$

решив которые, найдем  $Y_k(y)$ :

$$Y_1(y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}}, \quad Y_k(y) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Таким образом, для задачи (3) получаем следующее решение

$$v(x, y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Сравнивая условия задач (3) и (4), нетрудно установить, что решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x, y) = A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

**Ответ:**

$$u(x, y) = B \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + A \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

### С. 154, № 49

$$\begin{cases} \Delta u = -2, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Решение краевой задачи ищется в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение  $u_{xx} + u_{yy} = -2$  и граничные условия  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$  дает следующие краевые задачи для определения функций  $Y_k(y)$ :

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = -\frac{4}{a} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx = \begin{cases} -\frac{8}{k\pi}, & k = 2n - 1, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & k = 2n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$Y_k(0) = Y_k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, для четных  $k$  задачи Коши имеют нулевые решения. Решая задачи Коши для нечетных  $k$ , получим:

$$Y_k(y) = C_{1k} e^{\frac{k\pi y}{a}} + C_{2k} e^{-\frac{k\pi y}{a}} + \frac{8a^2}{(k\pi)^3},$$

где

$$C_{1k} = \frac{8a^2}{(k\pi)^3} \cdot \frac{e^{-\frac{k\pi b}{a}} - 1}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}}, \quad C_{2k} = \frac{8a^2}{(k\pi)^3} \cdot \frac{1 - e^{\frac{k\pi b}{a}}}{2 \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}}.$$

Подставив найденные  $Y_k(y)$  в ряд (1), учитывая, что ненулевыми будут только слагаемые, соответствующие нечетным  $k$ , получим:

$$u(x, y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi(b-y)}{a} + \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi y}{a}}{(2n-1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi b}{a}} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{a}.$$

### С. 154, № 49 (второй способ)

Так как правая часть уравнения  $f(x, y) = -2$  и граничные функции в условиях  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  не зависят от  $y$ , то решение можно искать в виде:

$$u(x, y) = v(x) + w(x, y),$$

где функции  $v(x)$  и  $w(x, y)$  являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} v''(x) = -2, & 0 < x < a, \\ v(0) = v(a) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(0, y) = w(a, y) = 0, & w(x, 0) = w(x, b) = -v(x). \end{cases} \quad (2)$$

Решением граничной задачи (1) является функция:  $v(x) = x(a - x)$ .

Решение задачи (2) будем искать в виде ряда по собственным функциям :

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (3)$$

Подстановка ряда (3) в уравнение  $\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = 0$  и граничные условия  $w(x, 0) = w(x, b) = -v(x) = x(x-a)$ , дает следующие краевые задачи для определения функций  $Y_k(y)$  :

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \\ Y_k(0) = Y_k(b) = \frac{2}{a} \int_0^a x(x-a) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

### Завершить решение

#### Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0, & u_y(x, 0) = f(x), & u_y(x, b) = g(x). \end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (1)$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = \text{const.}$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad 0 < x < a, \quad (2)$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \quad 0 < y < b. \quad (3)$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \quad (4)$$

которые вместе с уравнением (1) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\|X_k(x)\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра  $c = c_k$  общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} \right) \cos\frac{k\pi x}{a}. \quad (8)$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при  $y = 0$  и  $y = b$ . Будем иметь:

$$u_y(x, 0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} (A_k - B_k) \cos\frac{k\pi x}{a} = f(x),$$

$$u_y(x, b) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{a} \left( A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) \cos\frac{k\pi x}{a} = g(x).$$

Разлагая функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в ряд по собственным функциям  $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}$ , получим условия для нахождения коэффициентов  $A_0$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ . Так как для определения  $A_0$  имеем два уравнения:

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx, \quad A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a g(x) dx,$$



То в случае, если не будет выполнено условие

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx, \quad (9)$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx, \quad (10)$$

а коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  ( $k \neq 0$ ) ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{k\pi}{a} (A_k - B_k) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \\ \frac{k\pi}{a} \left( A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}} \right) = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \end{cases} \quad (11)$$

$k = 1, 2, \dots$

Так как для каждого  $k$  определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.

Коэффициент  $B_0$  ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

**Вывод:** *Задача Неймана имеет решение, если граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть записано в виде ряда (8), коэффициенты которого  $A_0, A_k, B_k$  ( $k \neq 0$ ) определяются условиями (10), (11), а  $B_0$  – произвольная постоянная.*

**Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике**

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, & (1) \\ u_x(0, y) = f_1(y), & u_x(a, y) = f_2(y), & 0 \leq y \leq b, & (2) \\ u_y(x, 0) = g_1(x), & u_y(x, b) = g_2(x), & 0 \leq x \leq a. & (3) \end{cases}$$

Условие разрешимости задачи Неймана (1)–(3):

$$\int_0^b (f_1(y) - f_2(y)) dy + \int_0^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = 0. \quad (4)$$

**1. Если граничные функции удовлетворяют условиям**

$$\begin{cases} \int_0^b f_1(y) dy - \int_0^b f_2(y) dy = 0, \\ \int_0^a g_1(x) dx - \int_0^a g_2(x) dx = 0, \end{cases} \quad (5)$$

то решение задачи (1)–(3) можно искать в виде суммы

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

где функции  $v(x, y)$  и  $w(x, y)$  являются решениями краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ v_x(0, y) = v_x(a, y) = 0, & u_y(x, 0) = g_1(x), & u_y(x, b) = g_2(x), \end{cases} \quad (6)$$

и

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ w_x(0, y) = f_1(y), & w_x(a, y) = f_2(y), & u_y(x, 0) = u_y(x, b) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

соответственно.

Решение краевых задач вида (6), (7) рассмотрено на занятии № 10.

**2. Если граничные функции удовлетворяют условиям (4) (выполнено условие разрешимости задачи Неймана), но не удовлетворяют усло-**

**виям (5)** (в этом случае задачи (6) и (7) не имеют решений), то решение задачи (1)-(3) можно искать в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (8)$$

где функция  $v(x, y)$  удовлетворяет условиям:

$$v_x(0, y) = f_1(y), \quad v_x(a, y) = f_2(y), \quad 0 \leq y \leq b. \quad (9)$$

Такая функция, в свою очередь, может быть найдена в виде:

$$v(x, y) = A(y)x^2 + B(y)x. \quad (10)$$

Подчинив выражение (10) условиям (9), найдем

$$A(y) = \frac{f_2(y) - f_1(y)}{2a}, \quad B(y) = f_1(y). \quad (11)$$

После подстановки (8) в условия краевой задачи (1)-(3), построим краевую задачу для нахождения функции  $w(x, y)$ :

$$\begin{cases} \Delta w = -\Delta v, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} w_x(0, y) = w_x(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} w_y(x, 0) = g_1(x) - v_y(x, 0), \\ w_y(x, b) = g_2(x) - v_y(x, b), & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (14)$$

Решение краевой задачи (12)-(14) можно искать в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x) \cos \frac{k\pi x}{a}. \quad (15)$$

Подстановка ряда (15) в уравнение (12) и граничные условия (14) дает следующие краевые задачи для определения функций  $Y_k(y)$ :

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = \begin{cases} -\frac{1}{a} \int_0^a \Delta v dx, & k = 0, \\ -\frac{2}{a} \int_0^a \Delta v \cdot \cos \frac{k\pi x}{a} dx, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$Y_k'(0) = \begin{cases} -\frac{1}{a} \int_0^a (g_1(x) - v_y(x,0)) dx, & k = 0, \\ -\frac{2}{a} \int_0^a (g_1(x) - v_y(x,0)) \cdot \cos \frac{k\pi x}{a} dx, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$Y_k'(b) = \begin{cases} -\frac{1}{a} \int_0^a (g_2(x) - v_y(x,b)) dx, & k = 0, \\ -\frac{2}{a} \int_0^a (g_2(x) - v_y(x,b)) \cdot \cos \frac{k\pi x}{a} dx, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Найдя функции  $Y_k(y)$ ,  $0, 1, \dots$ , в результате получим решение задачи (1)-(3) в виде (8), где функция  $v(x, y)$  определяется формулами (10), (11), а функция  $w(x, y)$  – рядом (15).

### Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в круге и кольце. Метод Фурье

#### С. 157, № 63 (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце)

Перейдя к полярным координатам  $u(x, y) \rightarrow v(r, \varphi)$ , получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, & 2 < r < 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(2, \varphi) = 2 \cos \varphi, \quad v(3, \varphi) = 3 \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце:

$$v(r, \varphi) =$$

$$= A_0 \ln r + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos k\varphi + (B_k r^k + B_{-k} r^{-k}) \sin k\varphi.$$

Подчинив общее решение заданным граничным условиям:

$$v(2, \varphi) = 2 \cos \varphi =$$

$$= A_0 \ln 2 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k}) \sin k\varphi,$$

$$v(3, \varphi) = 3 \sin \varphi =$$

$$= A_0 \ln 3 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k}) \sin k\varphi,$$

Построим системы уравнений для нахождения коэффициентов  $A_0, B_0, A_k, A_{-k}, B_k, B_{-k}$ :

$$1) \begin{cases} A_0 \ln a + B_0 = 0 \\ A_0 \ln b + B_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 0, \\ B_0 = 0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2A_1 + A_{-1} 2^{-1} = 2, \\ 3A_1 + A_{-1} 3^{-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{4}{5}, \\ A_{-1} = \frac{36}{5}, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2B_1 + B_{-1} 2^{-1} = 0, \\ 3B_1 + B_{-1} 3^{-1} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{9}{5}, \\ B_{-1} = -\frac{36}{5}, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k} = 0, \\ A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = 0, \\ A_{-k} = 0, \end{cases} \text{ для } k=2, 3, \dots$$

$$5) \begin{cases} B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k} = 0, \\ B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_k = 0, \\ B_{-k} = 0, \end{cases} \text{ для } k=2, 3, \dots$$

Таким образом,

$$v(r, \varphi) = \left(-\frac{4}{5}r + \frac{36}{5}\frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{9}{5}r - \frac{36}{5}\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим

$$u(x, y) = \frac{9}{5}y - \frac{4}{5}x + \frac{36}{5} \cdot \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

### С. 156, № 58 (4)

$$\begin{cases} \Delta u = y, & 0 \leq x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = 1. \end{cases}$$

Перейдя к полярным координатам  $u(x, y) \rightarrow v(r, \varphi)$ , получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = r \sin\varphi, & 0 < r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ v(R, \varphi) = 1, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями  $r$ :

$$v(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi) \quad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$\begin{aligned} A_0''(r) + \frac{1}{r}A_0'(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k''(r) + \frac{1}{r}A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}A_k(r) \right) \cos k\varphi + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left( B_k''(r) + \frac{1}{r}B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2}B_k(r) \right) \sin k\varphi = r \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $\sin k\varphi$  и  $\cos k\varphi$ , получим:

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0,$$

$$A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad \forall k,$$

$$B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r,$$

$$B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(R) \cos k\varphi + B_k(R) \sin k\varphi) \cos k\varphi = 1.$$

Отсюда получаем:

$$A_0(R) = 1, \quad A_k(R) = B_k(R) = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

В результате получили следующие краевые задачи:

$$1) \quad A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_0(R) = 1,$$

$$2) \quad A_k''(r) + \frac{1}{r} A_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

$$3) \quad B_1''(r) + \frac{1}{r} B_1'(r) - \frac{1}{r^2} B_1(r) = r, \quad 0 < r < R, \quad B_1(R) = 0,$$

$$4) \quad B_k''(r) + \frac{1}{r} B_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad B_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при  $r = 0$ .

Решение задачи 1):  $A_0(r) \equiv 1$ .

Уравнение задачи 3) является неоднородным уравнением Эйлера<sup>1</sup>:

$$r^2 B_1''(r) + r B_1'(r) - B_1(r) = r^3. \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «Дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие. Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014)

<http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1>

Общее решение соответствующего однородного имеет вид:

$$B_1^{одн}(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$B_1^ч(r) = D \cdot r^3.$$

Подставляя выражение для  $B_1^ч(r)$  в уравнение (2), найдем  $D = 1/8$ .

Таким образом, общим решением уравнения (2) является функция:

$$B_1(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} + \frac{1}{8} r^3.$$

Из условия ограниченности решения задачи 3) имеем  $C_2 = 0$ . Учитывая условие  $B_1(R) = 0$ , найдем  $C_1 = -\frac{1}{8} R^2$ . Таким образом, получили решение задачи 3):

$$B_1(r) = -\frac{1}{8} R^2 r + \frac{1}{8} r^3.$$

Решения задачи 1)-4) подставляем в ряд (1):

$$v(r, \varphi) = 1 + \left(-\frac{1}{8} R^2 r + \frac{1}{8} r^3\right) \sin \varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x, y) = 1 + \frac{1}{8} (y(x^2 + y^2) - R^2 y).$$

### С. 157, № 64

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x, y)|_{x^2 + y^2 = 1} = 0, & \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{x^2 + y^2 = 4} = 0 \end{cases}$$

1. Переходя к полярным координатам, получим:



$$\begin{cases} \Delta v(r, \phi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\phi\phi} = r \cos 2\phi, & 1 < r < 2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ v(1, \phi) = v_r(2, \phi) = 0, & 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1)$$

2. Решение краевой задачи ищется в виде ряда Фурье:

$$v(r, \phi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\phi + B_k(r) \sin k\phi) \quad (2)$$

3. Подстановка (2) в (1) дает следующие краевые задачи:

$$1) \quad rA_0''(r) + A_0'(r) = 0, \quad 1 < r < 2, \quad A_0(1) = A_0'(2) = 0,$$

$$2) \quad r^2 A_2''(r) + rA_2'(r) - 4A_2(r) = r^3, \quad 1 < r < 2, \quad A_2(1) = A_2'(2) = 0,$$

3)

$$r^2 A_k''(r) + rA_k'(r) - k^2 A_k(r) = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$A_k(1) = A_k'(2) = 0, \quad \forall k \neq 0, 2,$$

4)

$$r^2 B_k''(r) + rB_k'(r) - k^2 B_k(r) = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$B_k(1) = B_k'(2) = 0, \quad \forall k.$$

Ненулевое решение имеет только задача 2):

$$A_2(r) = \frac{1}{85} (17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}).$$

Тогда

$$v(r, \phi) = \frac{1}{85} (17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}) \cos 2\phi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x, y) = \frac{1}{85} (x^2 - y^2) \left( \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{32}{(x^2 + y^2)^2} - 49 \right).$$