Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

Занятие № 10 | № 11 | № 12 | № 13 | № 14

31.03.2025

Занятие № 9. Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{1}$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(a, y) = \nu(y), \quad 0 \le y \le b, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \qquad 0 \le x \le a, \tag{3}$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \tag{5}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \qquad 0 < y < b. \tag{6}$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \tag{7}$$

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \quad Y_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad \|Y_k(y)\|^2 = \frac{b}{2}, \quad k = 1,2,...$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x) = A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}\right)\sin\frac{k\pi y}{b}. \qquad (8)$$

Произвольные постоянные A_k и B_k найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k + B_k\right)\sin\frac{k\pi y}{b} = \mu(y),$$

$$u(a,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}\right)\sin\frac{k\pi y}{b} = \nu(y).$$

Разложив функции $\mu(y)$ и $\nu(y)$ в ряд по собственным $Y_k(y)$, получим:

$$\begin{cases} A_k + B_k = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b \mu(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy \stackrel{]}{=} \mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}} + B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}} = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b \nu(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy \stackrel{]}{=} \nu_k, \end{cases} \qquad (9)$$

$k = 1, 2, ...$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{\nu_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}}, \qquad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - \nu_k}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}}, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Подставив полученные выражения для A_k и B_k в ряд (8), получим

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b} + \mu_k\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi(a-x)}{b}}{\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}} \sin\frac{k\pi y}{b}.$$

С. 154, № 48

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = A\sin\frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{1}$$

Будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы:

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y), \tag{2}$$

когда функции $v(x,y)$ и $w(x,y)$ являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v(0,y) = v(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ v(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad v(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(x,0) = w(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ w(0,y) = A\sin\dfrac{\pi y}{b}, \quad w(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b. \end{cases} \tag{4}$$

Решение краевой задачи (3) можно найти в виде ряда по собственным функциям $X_k(x)$ (граничные условия однородные для $x = 0$ и $x = a$):

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}. \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнение Лапласа и граничные условия задачи (3) при $y = 0$ и $y = b$, получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad k \in N, \\ Y_k(0) = \begin{cases} B, & k = 1, \\ 0, & k \ne 1, \end{cases} \qquad Y_k(b) = 0, \ k \in N. \end{cases} \tag{6}$$

решив которые, найдем $Y_k(y)$:

$$Y_1(y) = B\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}}, \quad Y_k(y) = 0, \ \forall k \ne 1.$$

Таким образом, для задачи (3) получаем следующее решение

$$v(x,y) = B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}} \sin\frac{\pi x}{a}.$$

Сравнивая условия задач (3) и (4), нетрудно установить, что решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x,y) = A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Ответ:

$$u(x,y) = B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} + A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Домашнее задание

Постройте решение краевой задачи методом Фурье:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u_x(0,y) = \mu(y), \;\; u(a,y) = \nu(y), \;\; 0 \le y \le b,$$

$$u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0, \;\; 0 \le x \le a.$$

07.04.2025

Занятие № 10. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод Фурье

Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \;\; 0 < y < b, \\ u_x(0,y) = u_x(a,y) = 0, \;\; u_y(x,0) = f(x), \;\; u_y(x,b) = g(x). \end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \qquad (1)$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$Y''(y) - cY(y) = 0, \qquad 0 < y < b. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (2) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0,1,\dots,$$

$$\left\|X_k(x)\right\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}. \tag{8}$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при y = 0 и y = b. Будем иметь:

$$u_y(x,0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right)\cos\frac{k\pi x}{a} = f(x),$$

$$u_y(x,b) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a} = g(x).$$

Разлагая функции $f(x)$ и $g(x)$ в ряд по собственным функциям $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}$, получим условия для нахождения коэффициентов A_0, A_k, B_k. Так как для определения A_0 имеем два уравнения:

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \quad A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a g(x)dx,$$

То в случае, если не будет выполнено условие

$$\boxed{\int_0^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx,} \tag{9}$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \tag{10}$$

а коэффициенты A_k и B_k ($k \neq 0$) ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \\ \frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \end{cases} \tag{11}$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Так как для каждого k определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.

Коэффициент B_0 ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

Вывод: *Задача Неймана имеет решение, если граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть запи-*

сано в виде ряда (8), коэффициенты которого A_0, A_k, B_k $(k \neq 0)$ *определяются условиями (10), (11), а* B_0 *– произвольная постоянная.*

С. 155, № 56 (1) (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге)

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(R,\varphi) = f(\varphi), \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в круге:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n \tag{12}$$

Для нахождения коэффициентов ряда (12) надо (12) подчинить граничному условию $u(R,\varphi) = f(\varphi)$.

С. 156, № 59 (4) (условие разрешимости задачи Неймана)

Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u_r(R,\varphi) = f(\varphi), \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Условие разрешимости: $\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$

С. 156, № 60

В круге $K: \ 0 \le r < R, \ 0 \le \varphi \le 2\pi$ найти гармоническую функцию $u(r,\varphi) \in C^1(K)$, удовлетворяющую условию

$$u(R,\varphi) - u(R_1,\varphi) = \sin 2\varphi + \cos 3\varphi,$$

где $0 < R_1 < R$.

Общее решение уравнения Лапласа в круге:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)r^n \qquad (12)$$

Для нахождения коэффициентов ряда (12) надо (12) подчинить условию $u(R,\varphi)-u(R_1,\varphi)=\sin 2\varphi+\cos 3\varphi.$

Домашнее задание

С.155, № **55, 56 (7), 59 (5).**

14.04.2025

Занятие № 11. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод Фурье

С. 155, № 52. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круговом секторе

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi)=0, \quad 0<r<a, \quad 0<\varphi<\alpha, \\ u(a,\varphi)=f(\varphi), \quad 0\le\varphi\le\alpha, \\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0, \quad 0\le r\le a. \end{cases}$$

Будем искать ненулевое ограниченное решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(r,\varphi)=\Phi(\varphi)R(r) \qquad (1)$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=c=const.$$

Отсюда будем иметь:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - cR(x) = 0, \qquad 0 < r < a, \tag{2}$$

$$\Phi''(\varphi) + c\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (3) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\left\|\Phi_n(\varphi)\right\|^2 = \frac{\alpha}{2} \quad \forall n.$$

Для каждого значения параметра $c = c_n$ общее решение уравнения (2), удовлетворяющее условию ограниченности, имеет вид:

$$R_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (3), (4):

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\varphi) R_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}. \tag{8}$$

Подчиним полученный ряд (8) граничному условию при $r = a$. Будем иметь:

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} = f(\varphi).$$

Найдем коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ в ряд по собственным:

$$A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi \stackrel{]}{=} f_n, \quad n = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; A_n = f_n \cdot a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}.$$

Ответ: $u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha},\quad f_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi.$

С. 157, № 63 (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце)

Перейдя к полярным координатам $u(x,y)\to v(r,\varphi)$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases}\Delta v(r,\varphi)=0, \quad 2<r<3, \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\\ v(2,\varphi)=2\cos\varphi, \quad v(3,\varphi)=3\sin\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце:

$$v(r,\varphi)=$$

$$=A_0\ln r+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k+A_{-k}r^{-k})\cos k\varphi+(B_k r^k+B_{-k}r^{-k})\sin k\varphi.$$

Подчиним общее решение заданным граничным условиям:

$$v(2,\varphi)=2\cos\varphi=$$

$$=A_0\ln 2+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k 2^k+A_{-k}2^{-k})\cos k\varphi+(B_k 2^k+B_{-k}2^{-k})\sin k\varphi,$$

$$v(3,\varphi)=3\sin\varphi=$$

$$=A_0\ln 3+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k 3^k+A_{-k}3^{-k})\cos k\varphi+(B_k 3^k+B_{-k}3^{-k})\sin k\varphi,$$

Построим системы уравнений для нахождения коэффициентов A_0, B_0, A_k, A_{-k}, B_k, B_{-k}:

1) $$\begin{cases}A_0\ln a+B_0=0\\ A_0\ln b+B_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_0=0,\\ B_0=0,\end{cases}$$

2) $\begin{cases} 2A_1 + A_{-1}2^{-1} = 2, \\ 3A_1 + A_{-1}3^{-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{4}{5}, \\ A_{-1} = \frac{36}{5}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2B_1 + B_{-1}2^{-1} = 0, \\ 3B_1 + B_{-1}3^{-1} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{9}{5}, \\ B_{-1} = -\frac{36}{5}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} A_k 2^k + A_{-k}2^{-k} = 0, \\ A_k 3^k + A_{-k}3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = 0, \\ A_{-k} = 0, \end{cases}$ для k=2, 3, …

5) $\begin{cases} B_k 2^k + B_{-k}2^{-k} = 0, \\ B_k 3^k + B_{-k}3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_k = 0, \\ B_{-k} = 0, \end{cases}$ для k=2, 3, …

Таким образом,

$$v(r,\varphi) = \left(-\tfrac{4}{5}r + \tfrac{36}{5}\tfrac{1}{r}\right)\cos\varphi + \left(\tfrac{9}{5}r - \tfrac{36}{5}\tfrac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим

$$u(x,y) = \frac{9}{5}y - \frac{4}{5}x + \frac{36}{5}\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Домашнее задание

1. Решить краевую задачу в кольце:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\phi) = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \\ u_r(1,\phi) = 2\cos\phi + \sin 2\phi, \quad u(2,\phi) = 1 + 2\cos 2\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi. \end{cases}$$

2. Решить примерный вариант Контрольной работы № 2.

21.04.2025

Занятие № 12.

Метод конформных отображений (решение краевых задач на плоскости)

Методы теории функций комплексной переменной эффективно применяются для решения математических задач, возникающий в различных областях естествознания. В частности, применение аналитических (регулярных) функций дает во многих случаях достаточно простые способы решения краевых задач для уравнения Лапласа. Это определяется тесной связью, существующей между аналитическими функциями комплексной переменной и гармоническими функциями двух действительных переменных, а также *инвариантностью* уравнения Лапласа при конформном отображении[1].

Предположим, что необходимо решить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ с заданными граничными условиями в области сложной формы в плоскости переменных x и y. Эту краевую задачу можно трансформировать в новую краевую задачу, в которой требуется решить уравнение Лапласа $\Delta \tilde{u} = 0$ в более простой области переменных ξ и η, причем вторая область получена из первой с помощью конформного отображения $w = f(z)$, где $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$, а $\tilde{u}(w) = u(z)$ при $w = f(z)$.

После того как решение уравнения Лапласа $\tilde{u}(\xi, \eta)$ в простой области (круге, полуплоскости, прямоугольнике) найдено, достаточно подставить в это решение выражения $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, и мы получим решение исходной задачи $u(x, y)$, выраженное через исходные переменные.

[1] Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Часть 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. – Минск, 2008, с. 274.

Найти решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad x > 0, \quad (x-5)^2 + y^2 > 9,$$
$$u(0, y) = 0, \quad |y| < +\infty,$$
$$u(x, y) = 1, \quad (x-5)^2 + y^2 = 9.$$

Будем рассматривать функцию $u = u(x, y)$ как функцию точки $z = x + iy$ комплексной плоскости. При этом для функции $u = u(z)$ задача Дирихле примет вид:

$$\Delta u = 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad |z-5| > 3,$$
$$u\big|_{\operatorname{Re} z=0} = 0, \quad u\big|_{|z-5|=3} = 1. \tag{1}$$

Изобразим область D, где требуется решить задачу (рис. 1). Ее можно считать неконцентрическим кольцом (прямая – окружность бесконечного радиуса)

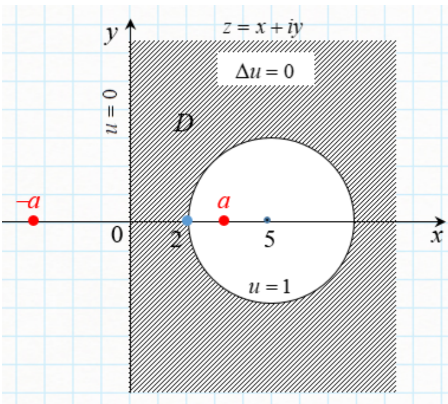


Рис. 1

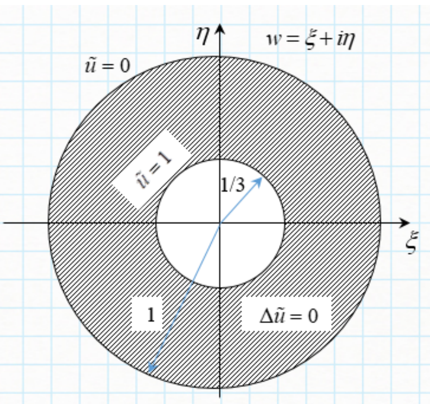


Рис. 2

Найдем конформное отображение области D на концентрическое кольцо. Для этого найдем две точки, симметричные одновременно относительно прямой $\operatorname{Re} z=0$ и относительно окружности $|z-5|=3$. Очевидно, что эти точки должны лежать на общем перпендикуляре к прямой и окружности, т.е. на действительной оси. Симметричными относительно прямой являются точки $x_1=a$ и $x_2=-a$ (считаем, что $a>0$). Из условия симметрии точек x_1 и x_2 относительно окружности $|z-5|=3$ получаем $(5+a)(5-a)=9$, откуда $a=4$. Следовательно, симметричными относительно прямой и окружности будут точки 4 и –4. Искомое комфортное отображение задается дробно-линейной функцией

$$w=\frac{z-4}{z+4}. \qquad (2)$$

Действительно, при этом отображении прямая $\operatorname{Re} z=0$ переходит в окружность γ. По свойству сохранения симметрии точки $z_1=4$ и $z_2=-4$ переходят в точки $w_1=0$ и $w_2=\infty$, симметричные относительно окружности γ. Следовательно, $w=0$ – центр окружности γ. Далее, так как точка $z=0$ переходит в точку $w=-1$, то γ – окружность $|w|=1$ (рис. 2).

При отображении (2) окружность $|z-5|=3$ переходит в окружность с центром в точке $w=0$, а точка $z=2$ переходит в точку w, для которой $|w|=\left|\frac{2-4}{2+4}\right|=\frac{1}{3}$. Поэтому образом окружности $|z-5|=3$ будет окружность радиусом $\frac{1}{3}$, т.е. $|w|=\frac{1}{3}$.

Таким образом, функция (2) конформно отображает область D на концентрическое кольцо $1/3<|w|<1$ (рис. 2). А так как уравнение

Лапласа инвариантно относительно конформных отображений[2], то при отображении (2) приходим к следующему выводу:

Краевой задаче (1) на плоскости (x, y) соответствует краевая задача на плоскости (ξ, η):

$$\Delta\tilde{u} = 0, \quad 1/3 < |w| < 1, \tag{3}$$

$$\tilde{u}\Big|_{|w|=1} = 0, \quad \tilde{u}\Big|_{|w|=1/3} = 1. \tag{4}$$

При этом $u(z) = \tilde{u}\left(\dfrac{z-4}{z+4}\right)$.

Решим задачу (3)-(4). Поскольку граничные условия (4) не зависят от полярного угла φ, то естественно предположить, что решение $\tilde{u}(w)$ зависит только от переменной r (у нас $\xi = r\cos\varphi,\ \ \eta = r\sin\varphi$). При этом общее решение уравнения Лапласа имеет вид:

$$\tilde{u}(w) = A + B\ln r,$$

где A и B – произвольные постоянные. Подчинив общее решение условиям (4), получим:

$$\begin{cases} A = 0, \\ A + B\ln(1/3) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 0,\ B = -\frac{1}{\ln 3}.$$

Следовательно, задача (3)-(4) имеет решение:

$$\tilde{u}(w) = -\frac{\ln|w|}{\ln 3}, \text{ так как } |w| = r.$$

Возвращаясь к переменной z, получим решение задачи (1):

---

[2] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – Москва: Наука, 1970. (Гл. 7, § 1).

$$u(z)=\frac{1}{\ln 3}\ln\left|\frac{z-4}{z+4}\right|.$$

Ответ: $u(x,y)=\dfrac{1}{\ln 3}\ln\left|\dfrac{x+4+iy}{x-4+iy}\right|=\dfrac{1}{2\ln 3}\ln\dfrac{(x+4)^2+y^2}{(x-4)^2+y^2}$

С. 156, № 58 (4)

$$\begin{cases}\Delta u=y, \quad 0\le x^2+y^2<R^2,\\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=R^2}=1.\end{cases}$$

Перейдя к полярным координатам $u(x,y)\to v(r,\varphi)$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases}\Delta v(r,\varphi)=v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}=r\sin\varphi, \quad 0<r<R, \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\\ v(R,\varphi)=1, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями r:

$$v(r,\varphi)=A_0(r)+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(r)\cos k\varphi+B_k(r)\sin k\varphi) \qquad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$A_0''(r)+\frac{1}{r}A_0'(r)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k''(r)+\frac{1}{r}A_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}A_k(r)\right)\cos k\varphi+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k''(r)+\frac{1}{r}B_k'(r)-\frac{k^2}{r^2}B_k(r)\right)\sin k\varphi=r\cdot\sin\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$, получим:

$$A_0''(r)+\tfrac{1}{r}A_0'(r)=0,$$
$$A_k''(r)+\tfrac{1}{r}A_k'(r)-\tfrac{k^2}{r^2}A_k(r)=0,\quad \forall k,$$
$$B_1''(r)+\tfrac{1}{r}B_1'(r)-\tfrac{1}{r^2}B_1(r)=r,$$
$$B_k''(r)+\tfrac{1}{r}B_k'(r)-\tfrac{k^2}{r^2}B_k(r)=0,\quad \forall k\neq 1.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(R)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k(R)\cos k\varphi+B_k(R)\sin k\varphi\right)\cos k\varphi=1.$$

Отсюда получаем:

$$A_0(R)=1,\quad A_k(R)=B_k(R)=0\quad \forall k\neq 0.$$

В результате получили следующие краевые задачи:

1) $A_0''(r)+\tfrac{1}{r}A_0'(r)=0,\quad 0<r<R,\quad A_0(R)=1,$
2) $A_k''(r)+\tfrac{1}{r}A_k'(r)-\tfrac{k^2}{r^2}A_k(r)=0,\quad 0<r<R,\quad A_k(R)=0,\quad \forall k\neq 0,$
3) $B_1''(r)+\tfrac{1}{r}B_1'(r)-\tfrac{1}{r^2}B_1(r)=r,\quad 0<r<R,\quad B_1(R)=0,$
4) $B_k''(r)+\tfrac{1}{r}B_k'(r)-\tfrac{k^2}{r^2}B_k(r)=0,\quad 0<r<R,\quad B_k(R)=0,\quad \forall k\neq 1.$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при $r = 0$.

Решение задачи 1): $A_0(r)\equiv 1.$

Уравнение задачи 3) является неоднородным уравнением Эйлера[3]:

$$r^2B_1''(r)+rB_1'(r)-B_1(r)=r^3. \qquad (2)$$

[3] О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «*Дифференциальные и интегральные уравнения*: Учебное пособие . Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014) http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1

Общее решение соответствующего однородного имеет вид:

$$B_1^{одн}(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$B_1^{ч}(r) = D \cdot r^3.$$

Подставляя выражение для $B_1^{ч}(r)$ в уравнение (2), найдем $D = 1/8$.
Таким образом, общим решением уравнения (2) является функция:

$$B_1(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} + \tfrac{1}{8} r^3.$$

Из условия ограниченности решения задачи 3) имеем $C_2 = 0$. Учитывая условие $B_1(R) = 0$, найдем $C_1 = -\tfrac{1}{8} R^2$. Таким образом, получили решение задачи 3):

$$B_1(r) = -\tfrac{1}{8} R^2 r + \tfrac{1}{8} r^3.$$

Задачи 2) и 4) имеют нулевые решения:

$$A_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

$$B_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Решения задачи 1)-4) подставляем в ряд (1):

$$v(r,\varphi) = 1 + \left(-\tfrac{1}{8} R^2 r + \tfrac{1}{8} r^3\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x,y) = 1 + \tfrac{1}{8}\left(y(x^2 + y^2) - R^2 y\right).$$

Домашнее задание

С.157, № 62.

Подготовка к контрольной работе (**12 мая 2025 г.**)

Примерный вариант

28.04.2025

Занятие № 13. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона

Задача 1. Найти гармоническую функцию $u = u(x, y)$ в полуплоскости $y > 0$, если известно, что

$$u(x,0) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости:

$$\Delta u = 0, \quad y > 0,$$
$$u(x,y)\big|_{y=0} = u_0(x),$$

определяется интегралом Пуассона:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}.$$

Требуется вычислить интеграл

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t^2+1)\left((t-x)^2+y^2\right)}.$$

По-видимому, проще всего это сделать, если воспользоваться теорией вычетов, используя формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t^2+1)\left((t-x)^2+y^2\right)} = 2\pi i(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=x+iy} f(z)),$$

где $f(z) = \dfrac{t}{(z^2+1)\left((z-x)^2+y^2\right)}$.

Так как

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2((i-x)^2+y^2)}, \qquad \operatorname*{res}_{z=x+iy} f(z) = \frac{x+iy}{2iy((x+iy)^2+1)},$$

то будем иметь

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\;dt}{(t^2+1)\left((t-x)^2+y^2\right)}=\frac{iy}{(i-x)^2+y^2}+\frac{x+iy}{(x+iy)^2+1}=$$

$$=\frac{iy}{((i-x)+iy)((i-x)-iy)}+\frac{x+iy}{(x+iy-i)(x+iy+i)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-x-iy}-\frac{1}{i-x+iy}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+iy-i}+\frac{1}{x+iy+i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i(1-y)-x}-\frac{1}{i(1+y)-x}-\frac{1}{i(1-y)-x}+\frac{1}{i(1+y)+x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i(1+y)}+\frac{1}{x-i(1+y)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}=\frac{x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Вычисление в MathCAD:

$$\frac{i\cdot y}{(i-x)^2+y^2}+\frac{x+i\cdot y}{(x+i\cdot y)^2+1}\ \text{simplify}\ \rightarrow\ \frac{x}{x^2+y^2+2\cdot y+1}$$

Таким образом,

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Задача 2. Найти гармоническую функцию $u=u(x,y)$ в полу-плоскости $y>0$, если известно, что

$$u(x,0)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Решение задачи с помощью MathCAD

Ответ: $u(x,y)=\dfrac{2x(y+1)}{(x^2+(1+y)^2)^2}$.

С. 157, № 64

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1<x^2+y^2<4,\\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1}=0, \quad \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n}\bigg|_{x^2+y^2=4}=0\end{cases}$$

1. Переходя к полярным координатам, получим:

$$\begin{cases}\Delta v(r,\phi)=v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\phi\phi}=r\cos 2\phi, \quad 1<r<2, \quad 0\le\phi\le 2\pi,\\ v(1,\phi)=v_r(2,\phi)=0, \quad 0\le\phi\le 2\pi.\end{cases} \qquad (1)$$

2. Решение краевой задачи ищется в виде ряда Фурье:

$$v(r,\varphi)=A_0(r)+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(r)\cos k\varphi+B_k(r)\sin k\varphi) \qquad (2)$$

3. Подстановка (2) в (1) дает следующие краевые задачи:

1) $rA_0''(r)+A_0'(r)=0, \ 1<r<2, \ A_0(1)=A_0'(2)=0,$

2) $r^2A_2''(r)+rA_2'(r)-4A_2(r)=r^3, \ 1<r<2, \ A_2(1)=A_2'(2)=0,$

3)
$$r^2A_k''(r)+rA_k'(r)-k^2A_k(r)=0, \ 1<r<2,$$
$$A_k(1)=A_k'(2)=0, \quad \forall k\ne 0,2,$$

4)
$$r^2B_k''(r)+rB_k'(r)-k^2B_k(r)=0, \ 1<r<2,$$
$$B_k(1)=B_k'(2)=0, \quad \forall k.$$

Ненулевое решение имеет только задача 2):

$$A_2(r) = \frac{1}{85}\left(17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}\right).$$

Тогда

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{85}\left(17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}\right)\cos 2\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x,y) = \frac{1}{85}(x^2 - y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2} + \frac{32}{(x^2+y^2)^2} - 49\right).$$

Домашнее задание

1) С.157, № 66.
2) С помощью [метода конформных отображений]() построить решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad y < 0, \quad (y+4)^2 + x^2 > 4,$$
$$u(x,y)\big|_{y=0} = 1,$$
$$u(x,y)\big|_{(y+4)^2+x^2=4} = 2.$$

Подготовка к контрольной работе (**12 мая 2025 г.**)

[Примерный вариант]()

05.05.2025

Занятие № 14. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона

Задача 1. Найти стационарное распределение потенциала $u = u(x, y)$ в полуполосе $0 < y < \pi,\ x > 0,$ если горизонтальные стороны полосы заземлены, а вертикальная сторона полосы имеет потенциал V.

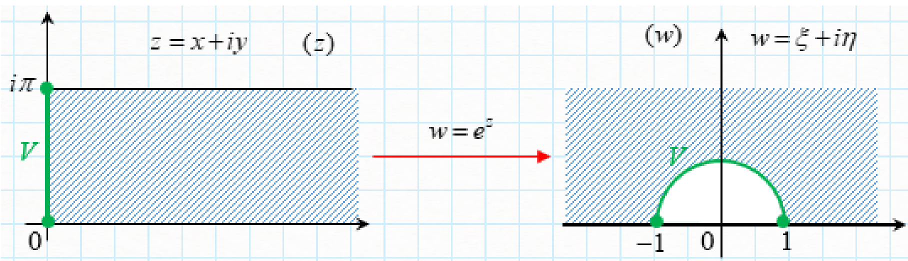
Требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуполосе:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad 0 < y < \pi,\ x > 0, \\ &u(x, y)\big|_{y=0} = u(x, y)\big|_{y=\pi} = 0, \quad u(x, y)\big|_{x=0} = V. \end{aligned} \tag{1}$$

1 способ. *Решение задачи (1) можно построить с помощью* *метода конформных отображений*. Задачу Дирихле (1) в полуполосе можно свести к задаче Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости, решение которой определяет интеграл Пуассона (см. задачу 1 занятия № 13).

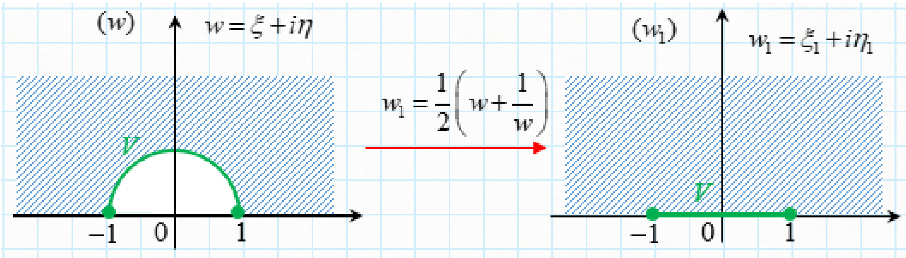
Полуполоса отображается на верхнюю полуплоскость при последовательном выполнении двух конформных отображений.

Первое: $w = e^z$



При этом $\xi = e^x \cos y, \quad \eta = e^x \sin y.$

Второе: $w_1 = \dfrac{1}{2}\left(w + \dfrac{1}{w}\right)$ (функция Жуковского)



При этом $\xi_1 = \dfrac{1}{2}\left(\xi + \dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\right), \quad \eta_1 = \dfrac{1}{2}\left(\eta - \dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right).$

Функции $u(x,y)$ соответствует функция $\tilde{u} = \tilde{u}(\xi_1, \eta_1)$, которая является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta \tilde{u} = 0, \quad \eta_1 > 0, \quad -\infty < \xi_1 < +\infty,$$

$$\tilde{u}(\xi_1, 0) = f(\xi_1) = \begin{cases} V, & |\xi_1| < 1, \\ 0, & |\xi_1| > 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение задачи (2) определим с помощью интеграла Пуассона:

$$\tilde{u}(\xi_1, \eta_1) = \frac{\eta_1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-\xi_1)^2 + \eta_1^2}.$$

Подставив в интеграл выражение для граничной функции f, получим

$$\tilde{u}(\xi_1, \eta_1) = \frac{\eta_1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{V dt}{(t-\xi_1)^2 + \eta_1^2} = \frac{V}{\pi}\left(\operatorname{arctg} \frac{t-\xi_1}{\eta_1}\right)\Bigg|_{t=-1}^{t=1} =$$

$$= \frac{V}{\pi}\left(\operatorname{arctg} \frac{1-\xi_1}{\eta_1} + \operatorname{arctg} \frac{1+\xi_1}{\eta_1}\right).$$

Так как

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\left(e^x \cos y + \frac{e^x \cos y}{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y}\right) = \cos y \cdot \operatorname{ch} x,$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\left(e^x \sin y - \frac{e^x \sin y}{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y}\right) = \sin y \cdot \operatorname{sh} x,$$

то

$$\boxed{\begin{aligned} &u(x,y) = \tilde{u}(\cos y \cdot \operatorname{ch} x, \sin y \cdot \operatorname{sh} x) = \\ &= \frac{V}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\cos y \cdot \operatorname{ch} x}{\sin y \cdot \operatorname{sh} x} + \operatorname{arctg}\frac{1+\cos y \cdot \operatorname{ch} x}{\sin y \cdot \operatorname{sh} x}\right). \end{aligned}} \qquad (3)$$

Можно показать, что при $x > 0$

$$\lim_{y \to 0+} u(x,y) = 0, \qquad \lim_{y \to \pi -} u(x,y) = 0,$$

а при $0 < y < \pi$

$$\lim_{x \to 0+} u(x,y) = V.$$

2 способ. *Ограниченное решение задачи (1) можно найти методом Фурье.* Будем искать решение в виде ряда по собственным:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_k(x)\sin ny. \qquad (4)$$

Подчинив ряд уравнению Лапласа, условию $u(0,y) = V$, учитывая условие ограниченности решения, получим следующие задачи для определения коэффициентов ряда:

$$X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0, \quad X_n(0) = \alpha_n, \quad |X_n(+\infty)| < \infty, \quad n = 1,2,..., \qquad (5)$$

где α_n коэффициенты разложения функции $g(y) = V$ в ряд по собственным:

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V \sin ny \, dy = \frac{2V}{\pi n}(1 - (-1)^n).$$

Решением задач (5) являются функции

$$X_n(x) = \frac{2V}{\pi n}(1-(-1)^n)e^{-nx}.$$

Следовательно, решением задачи (1) будет ряд

$$\boxed{u(x,y) = \frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{-nx}\sin ny.} \qquad (6)$$

Пример численных расчетов по формулам (3) и (6), выполненных в MathCAD:

$V := 1 \qquad N := 900$

$$u(x,y) := \frac{V}{\pi}\cdot\left(\operatorname{atan}\left(\frac{1-\cos(y)\cdot\cosh(x)}{\sin(y)\cdot\sinh(x)}\right) + \operatorname{atan}\left(\frac{1+\cos(y)\cdot\cosh(x)}{\sin(y)\cdot\sinh(x)}\right)\right)$$

$$v(x,y) := \frac{2\cdot V}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k}\cdot e^{-k\cdot x}\cdot\sin(k\cdot y)\right]$$

$i := 1..4$

$x_i :=$	$y_i :=$	$u(x_i, y_i) =$	$v(x_i, y_i) =$
0.1	0.1	0.498939	0.498939
1	1.3	0.437207	0.437207
1.5	1.5	0.278905	0.278905
2	3	0.024758	0.024758

Задача 2. Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, & (1) \\ u_x(0, y) = f_1(y), \quad u_x(a, y) = f_2(y), \quad 0 \le y \le b, & (2) \\ u_y(x,0) = g_1(x), \quad u_y(x,b) = g_2(x), \quad 0 \le x \le a. & (3) \end{cases}$$

Условие разрешимости задачи Неймана (1)–(3):

$$\boxed{\int_0^b \left(f_1(y) - f_2(y) \right) dy + \int_0^a \left(g_1(x) - g_2(x) \right) dx = 0.} \tag{4}$$

1. Если граничные функции удовлетворяют условиям

$$\boxed{\begin{gathered} \int_0^b f_1(y)dy - \int_0^b f_2(y)dy = 0, \\ \int_0^a g_1(x)dx - \int_0^a g_2(x)dx = 0, \end{gathered}} \tag{5}$$

то решение задачи (1)-(3) можно искать в виде суммы

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),$$

где функции $v(x, y)$ и $w(x, y)$ являются решениями краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v_x(0, y) = v_x(a, y) = 0, \quad u_y(x,0) = g_1(x), \quad u_y(x,b) = g_2(x), \end{cases} \tag{6}$$

и

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w_x(0, y) = f_1(y), \quad w_x(a, y) = f_2(y), \quad u_y(x,0) = u_y(x,b) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

соответственно.
Решение краевых задач вида (6), (7) рассмотрено на занятии № 10.

2. Если граничные функции удовлетворяют условиям (4) (выполнено условие разрешимости задачи Неймана)**, но не удовлетворяют условиям (5)** (в этом случае задачи (6) и (7) не имеют решений), то решение задачи (1)-(3) можно искать в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y), \tag{8}$$

где функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$v_x(0,y)=f_1(y),\quad v_x(a,y)=f_2(y),\quad 0\le y\le b. \tag{9}$$

Такая функция, в свою очередь, может быть найдена в виде:

$$v(x,y)=A(y)x^2+B(y)x. \tag{10}$$

Подчинив выражение (10) условиям (9), найдем

$$A(y)=\frac{f_2(y)-f_1(y)}{2a},\qquad B(y)=f_1(y). \tag{11}$$

После подстановки (8) в условия краевой задачи (1)-(3), построим краевую задачу для нахождения функции $w(x, y)$:

$$\begin{cases}\Delta w=-\Delta v,\quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, & (12)\\ w_x(0,y)=w_x(a,y)=0,\quad 0\le y\le b, & (13)\\ w_y(x,0)=g_1(x)-v_y(x,0), & \\ w_y(x,b)=g_2(x)-v_y(x,b),\quad 0\le x\le a. & (14)\end{cases}$$

Решение краевой задачи (12)-(14) можно искать в виде ряда по собственным функциям:

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(y)\cos\frac{k\pi x}{a}. \tag{15}$$

Подстановка ряда (15) в уравнение (12) и граничные условия (14) дает следующие краевые задачи для определения функций $Y_k(y)$:

$$Y_k''(y)-\left(\tfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \Delta v dx, & k=0,\\ -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a \Delta v\cdot\cos\tfrac{k\pi x}{a}dx, & k=1,2,\ldots\end{cases}$$

$$Y_k'(0)=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a (g_1(x)-v_y(x,0))dx, & k=0,\\ -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a (g_1(x)-v_y(x,0))\cdot\cos\tfrac{k\pi x}{a}\,dx, & k=1,2,\ldots\end{cases}$$

$$Y_k'(b)=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a (g_2(x)-v_y(x,b))dx, & k=0,\\ -\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a (g_2(x)-v_y(x,b))\cdot\cos\tfrac{k\pi x}{a}\,dx, & k=1,2,\ldots\end{cases}$$

Найдя функции $Y_k(y)$, $0,1,\ldots,$ в результате получим решение задачи (1)-(3) в виде (8), где функция $v(x, y)$ определяется формулами (10), (11), а функция $w(x, y)$ – рядом (15).

Задача 3. Найти стационарное распределение температуры в нижней полуплоскости $y>0$, если на ее границе $y=0$ поддерживается температура $A\sin x$ $(A=const)$.

Требуется решить следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned}&\Delta u=0, \quad y>0,\\ &u(x,y)\big|_{y=0}=A\sin x.\end{aligned} \tag{1}$$

1 способ. Решение задачи (1) можно построить с помощью интеграла Пуассона (см. задачу 1 занятия № 13):

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A\sin t\,dt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{Ay}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{(t-x)^2+y^2}. \qquad (2)$$

Вычислить интеграл в формуле (2) можно с помощью вычетов, используя формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R(t)\sin\alpha t\,dt=2\pi\,\mathrm{Re}\left[\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}(e^{i\alpha z}R(z))\right].$$

Для интеграла в формуле (2):

$$R(t)=\frac{1}{(t-x)^2+y^2},\quad \alpha=1.$$

Функция $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z-x)^2+y^2}$ имеет в верхней полуплоскости один полюс первого порядка – точку $z=x+iy$. Найдем вычет $f(z)$ в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=x+iy}f(z)=\left.\frac{e^{iz}}{\left((z-x)^2+y^2\right)'}\right|_{z=x+iy}=\frac{-ie^{-y+ix}}{2y}=\frac{e^{-y}}{2y}\left(\sin x-i\cos x\right).$$

Для интеграла в формуле (2) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{(t-x)^2+y^2}=2\pi\,\mathrm{Re}\left[\operatorname*{res}_{z=x+iy}f(z)\right]=2\pi\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-y}}{2y}\left(\sin x-i\cos x\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{y}e^{-y}\sin x.$$

Следовательно, получим решение задачи (1) по формуле (2):

$$\boxed{u(x,y)=Ae^{-y}\sin x.}$$

2 способ. Так как граничная функция $g(x) = A\sin x$ является 2π-периодичной, то ограниченное решение задачи (2) можно найти в виде ряда Фурье:

$$u(x,y) = A_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(y)\cos nx + B_n(y)\sin nx). \qquad (3)$$

Подчинив ряд (3) условиям краевой задачи (1), для коэффициентов ряда получим следующие краевые задачи:

1) $A_0''(y) = 0, \quad A_0(0) = 0, \quad |A_0(+\infty)| < \infty;$

2) $A_n''(y) - n^2 A_n(y) = 0, \quad A_n(0) = 0, \quad |A_n(+\infty)| < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots;$

3) $B_1''(y) - B_1(y) = 0, \quad B_1(0) = A, \quad |B_1(+\infty)| < \infty;$

4) $B_n''(y) - n^2 B_n(y) = 0, \quad B_n(0) = 0, \quad |B_n(+\infty)| < \infty, \quad n = 2, 3, \ldots.$

Домашнее задание

Завершить построение решения **задачи 3** вторым способом.

Подготовка к контрольной работе (**12 мая 2025 г.**)

Примерный вариант