Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

6.02.2024

Занятие № 1. Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа

Примерный вариант контрольного задания

В области $0 < x < \pi,\ t > 0$ решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 16u_x + 4u_t - 4(\cos t + 4) = e^{2x}\sin 5x - \sin t,$$

$$u(0,t) = \sin t, \qquad u(\pi,t) = \pi + \sin t,$$

$$u(x,0) = x + 2e^{2x}\cos x \sin 5x, \qquad u_t(x,0) = 1.$$

Решение задачи можно искать в виде:

$$u(x,t) = x + \sin t + w(x,t), \tag{1}$$

(избавляемся от неоднородности в граничных условиях)

где $w(x,t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$w_{tt} - 4w_{xx} + 16w_x + 4w_t = e^{2x}\sin 5x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$w(x,0) = 2e^{2x}\cos x \sin 5x, \qquad w_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi. \tag{4}$$

Уравнение краевой задачи можно упростить, если искать его решение в виде

$$w(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t),$$

определив коэффициенты α и β так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало ее производных по переменным x и t.

Так как

$$
\begin{array}{r|l}
0 & w(x,t) = e^{\alpha x+\beta t} v(x,t), \\[2ex]
16 & w_x = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha v + v_x), \\[2ex]
4 & w_t = e^{\alpha x+\beta t}(\beta v + v_t), \\[2ex]
-4 & w_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\[2ex]
1 & w_{tt} = e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}),
\end{array}
$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$
\begin{array}{r|l}
v & e^{\alpha x+\beta t}(16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2) \\[2ex]
v_x & e^{\alpha x+\beta t}(16 - 8\alpha) \\[2ex]
v_t & e^{\alpha x+\beta t}(4 + 2\beta) \\[2ex]
v_{xx} & -4e^{\alpha x+\beta t} \\[2ex]
v_{tt} & e^{\alpha x+\beta t}
\end{array}
$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$
\begin{cases} 16 - 8\alpha = 0, \\ 4 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -2, \end{cases}
$$

(при этом $16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2 = 12$)

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} - 4v_{xx} + 12v = e^{2t}\sin 5x. \qquad (6)$$

А

$$w(x,t) = e^{2x-2t} v(x,t). \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в условия (3) и (4), получим условия для функции $v(x, t)$:

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

$$v(x,0) = 2\cos x \sin 5x, \qquad v_t(x,0) = 4\cos x \sin 5x, \qquad 0 \leq x \leq \pi. \tag{9}$$

Будем искать решение краевой задачи (6), (8), (9) в виде ряда по собственным функциям:

$$v(x,t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x) = \sin kx,\ k \in N,$ являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$
$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

и, следовательно,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \tag{10}$$

Подставляя ряд (10) в (6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + (4k^2 + 12) T_k(t) \right) \sin kx = e^{2t} \sin 5x.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + (4k^2 + 12) T_k(t) = \begin{cases} e^{2t}, & k = 5, \\ 0, & k \neq 5. \end{cases}$$

Подставляя ряд (10) в начальные условия (9), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin kx = 2\cos x \sin 5x = \sin 6x + \sin 4x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 4,6, \\ 0, & k \neq 4,6, \end{cases}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k{}'(0)\sin kx = 4\cos x \sin 5x = 2\sin 6x + 2\sin 4x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_k{}'(0) = \begin{cases} 2, & k = 4,6, \\ 0, & k \neq 4,6. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

1) $\begin{cases} T_4''(t) + 76T_4(t) = 0, & t > 0, \\ T_4(0) = 1, \ \ T_4{}'(0) = 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} T_5''(t) + 112T_5(t) = e^{2t}, & t > 0, \\ T_5(0) = 0, \ \ T_5{}'(0) = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} T_6''(t) + 156T_6(t) = 0, & t > 0, \\ T_6(0) = 1, \ \ T_6{}'(0) = 2. \end{cases}$

4) $\forall\ k \neq$ 4,5,6:

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0, \ \ T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Задачи 1)-4) имеют следующие решения:

$$T_4(t) = \cos(\sqrt{76}t) + \frac{2}{\sqrt{76}}\sin(\sqrt{76}t);$$

$$T_5(t) = \frac{1}{116}\left(e^{2t} - \cos(\sqrt{112}t) - \frac{2}{\sqrt{112}}\sin(\sqrt{112}t) \right);$$

$$T_6(t) = \cos(\sqrt{156}t) + \frac{2}{\sqrt{156}}\sin(\sqrt{156}t);$$

$$T_n(t) = 0, \ \forall n \neq 4, 5, 6.$$

Следовательно, используя формулы (10), (7) и (1), найдем:

$$u(x,t) = x + \sin t + e^{2(x-t)}\left(T_4(t)\sin 4x + T_5(t)\sin 5x + T_6(t)\sin 6x\right).$$

Домашнее задание

Домашняя контрольная работа не тему «**Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа**»

Срок выполнения: **29 февраля**