Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

16.11.2023

Занятие № 11

Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad |x| < +\infty. \tag{2}$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{3}$$

Гл. 5, § 2, с. 119: Пример 2

Пример 2. Показать, что если заданные дифференцируемые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ таковы, что функции:

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \alpha\varphi'(x) + \beta\varphi(x),$$
$$\tilde{\psi}(x) \equiv \alpha\psi'(x) + \beta\psi(x)$$

являются нечетными, то функция $u = u(x,t)$, определяемая формулой Даламбера (2.3), в которой $f(x,t) \equiv 0$, удовлетворяет условию:

$$\alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = 0 \quad \text{для } \forall t \geq 0.$$

Решение.$\triangleright$ Для функции $u = u(x,t)$ имеем:

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)}{2} + \frac{\psi(x+at)-\psi(x-at)}{2a}.$$

$$+\beta\frac{\varphi(at)+\varphi(-at)}{2}+\frac{\beta}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)\,d\xi. \qquad (*)$$

Учитывая, что

$$\psi(at)-\psi(-at)=\int_{-at}^{at}\psi'(\xi)\,d\xi,$$

равенство (*) можно привести к виду

$$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=$$

$$=\frac{\alpha\varphi'(at)+\beta\varphi(at)}{2}+\frac{\alpha\varphi'(-at)+\beta\varphi(-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}(\alpha\psi'(\xi)+\beta\psi(\xi))\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(at)+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(-at)+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi.$$

Откуда, в силу нечетности функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$, заключаем:

$$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=0. \quad \triangleleft$$

Тогда

$$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=\alpha\frac{\varphi'(at)+\varphi'(-at)}{2}+\alpha\frac{\psi(at)-\psi(-at)}{2a}+$$

Гл. 5, § 2, с. 124: № 17 (в)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x,t)\equiv 0$):
Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$-периодические функции, то $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

$$1)\quad u(0,t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{-\varphi(at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=0.$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

$$2)\quad u(l,t)=\frac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

2) $\quad u(l,t)=\dfrac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$

По свойствам нечетности и $2l$-периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at)=-\varphi(-l+at)=-\varphi(-l+at+2l)=-\varphi(l+at)\,.$$

Разбив интеграл на два:

$$\int\limits_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi=\int\limits_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и $2l$-периодичности функции ψ:

$$\int\limits_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi=\left[\xi=-\eta\right]=-\int\limits_{-l+at}^{-l}\psi(-\eta)d\xi=\int\limits_{-l+at}^{-l}\psi(\eta)d\eta=\int\limits_{-l+at}^{-l}\psi(\eta+2l)d\eta=$$

$$=\left[\xi=\eta+2l\right]=\int\limits_{l+at}^{l}\psi(\xi)d\xi=-\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

Таим образом, получаем:

$$u(l,t)=\frac{-\varphi(l+at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(-\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi\right)=0.$$

Гл. 5, § 2, с. 124: № 18 (а)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($\varphi(x)\equiv 0,\ \ \psi(x)\equiv 0$):
Если функция $f(x,t)$ – нечетные относительно x, то $u(0,t)=0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

$$u(0,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau=0,$$

так как интеграл $\int\limits_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$ рассматривается на симметричном промежутке с подынтегральной функцией, которая является нечетной при любом фиксированном τ, и, следовательно, он равен 0.

Домашнее задание

С. 123-124: № 13(7), 18(б).

23.11.2023

Занятие № 12

Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Формула Даламбера

Гл. 5, § 2, с. 123: № 15

[Иллюстративный материал](#) **на сайте дисциплины**

Гл. 5, § 2, с. 123: № 13 (3)

$$u_{xx} - u_{tt} + 5u_x + 3u_t + 4u = 0, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = xe^{-\frac{5}{2}x - x^2}, \quad u_t(x,0) = e^{-\frac{5}{2}x}, \quad |x| < +\infty. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t.

Так как

$$\begin{array}{r|l}
4 & u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t), \\
5 & u_x = e^{\alpha x + \beta t}(\alpha v + v_x), \\
3 & u_t = e^{\alpha x + \beta t}(\beta v + v_t), \\
1 & u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\
-1 & u_{tt} = e^{\alpha x + \beta t}(\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}),
\end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$
\begin{array}{r|l}
v & e^{\alpha x+\beta t}(4+5\alpha+3\beta+\alpha^2-\beta^2) \\
v_x & e^{\alpha x+\beta t}(5+2\alpha) \\
v_t & e^{\alpha x+\beta t}(3-2\beta) \\
v_{xx} & e^{\alpha x+\beta t} \\
v_{tt} & -e^{\alpha x+\beta t}
\end{array}
$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 5+2\alpha=0, \\ 3-2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-5/2, \\ \beta=3/2, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt}=v_{xx}. \tag{6}$$

А

$$u(x,t)=e^{(-5x+3t)/2}v(x,t), \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$v(x,0)=xe^{-x^2}, \quad v_t(x,0)=e^{5x/2}\left(u_t(x,0)-\frac{3}{2}u(x,0)\right)=1-\frac{3}{2}xe^{-x^2}. \tag{8}$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера (при этом $a=1$):

$$v(x,t)=\frac{(x-t)e^{-(x-t)^2}+(x+t)e^{-(x+t)^2}}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left(1-\tfrac{3}{2}\xi e^{-\xi^2}\right)d\xi.$$

Вычислив интеграл, после упрощения выражения получим:

$$v(x,t)=t+e^{-x^2-t^2}\left(x\operatorname{ch}2xt-\left(t+\frac{3}{4}\right)\operatorname{sh}2xt\right)$$

Подставив полученное выражение для $v(x,t)$ в (7), найдем решение задачи (4)-(5).

Домашнее задание

С. 117: Разобрать пример 1.