Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

[Задания по теме 4]

28.11.2025

Занятие № 13. Системы уравнений в частных производных 1-го порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим систему уравнений для искомой функции $u = u(x, y)$:

$$\begin{cases} F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ G\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Если уравнения системы (1) имеют общее решение, то систему (1) называют **совместной** (уравнения системы **совместными**). Используя для частных производных **обозначения Монжа**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q,$$

систему (1) запишем в виде:

$$\begin{cases} F(x, y, u, p, q) = 0, \\ G(x, y, u, p, q) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что в некоторой области изменения переменных x, y, u, p, q уравнения системы (2) могут быть разрешены относительно p и q. Результат разрешения запишем в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u). \end{cases} \tag{3}$$

Необходимым условием совместности системы, записанной в форме (3), является следующее:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\frac{\partial B}{\partial u} = 0. \qquad (4)$$

При этом предполагается существование и непрерывность производных, входящих в условие (4).

1. **Если условие (4) не выполняется тождественно**, то (4) будет уравнением с тремя переменными x, y, u. Оно определит, вообще говоря, u как неявную функцию переменных x и y, т.е. $u = \varphi(x, y)$. При этом, если решение системы (3) существует, то не может быть иным, как этой функцией. Прямая подстановка в систему (3) даст ответ на вопрос, является ли функция $u = \varphi(x, y)$ решением системы (3) или нет.
2. **Тождественное выполнение условия** (4) **необходимо и достаточно, чтобы система** (3) **была совместна и имела множество решений, зависящее произвольной постоянной**. При этом интегрирование уравнений системы выполняется методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Выяснить, является ли система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y - u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xu; \end{cases}$$

совместной.

Решение: Здесь $A(x, y, u) = y - u$, $B(x, y, u) = xu$. Составим выражение: $A'_y + BA'_u - B'_x - AB'_u = 1 - xu - u - (y-u)x = 1 - u - yx$. Выражение не равно нулю тождественно. Приравняв его к нулю, получим: $u = 1 - yx$. Подстановкой в уравнения системы убеждаемся, что эта функция не является решением.

Пример 2. Выяснить, является ли система уравнений совместной. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2yu - u^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xu; \end{cases}$$

Решение: Здесь $A(x,y,u) = 2yu - u^2$, $B(x,y,u) = xu$. Составим выражение:

$$A'_y + BA'_u - B'_x - AB'_u = 2u + xu(2y - 2u) - u - (2yu - u^2)x = u(1 - xu).$$

Приравняв его к нулю, получим: $u = 0$, $u = \dfrac{1}{x}$. Подстановкой в уравнения системы убеждаемся, что эта функция $u = 0$ является решением, а функция $u = \dfrac{1}{x}$ – нет.

Ответ: $u = 0$.

Пример 3. Выяснить, является ли система уравнений совместной. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u}{x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2u}{y}; \end{cases} \qquad (3.1)$$

Решение: Так как $A(x,y,u) = \dfrac{u}{x}$, $B(x,y,u) = \dfrac{2u}{y}$, то для левой части условия (4) будем иметь:

$$A'_y + BA'_u - B'_x - AB'_u = \frac{2u}{y} \cdot \frac{1}{x} - \frac{u}{x} \cdot \frac{2}{y} \equiv 0.$$

Условие совместности выполняется тождественно. Интегрируя первое уравнение системы (3.1), как уравнение с разделяющимися переменными, в котором переменная y рассматривается как параметр, получим:

$$u(x,y)=x\varphi(y). \qquad (3.2)$$

Подставим (3.2) во второе уравнение системы (3.1):

$$x\varphi'(y)=\frac{2x\varphi(y)}{y} \quad\to\quad \varphi'(y)=\frac{2\varphi(y)}{y} \quad\to\quad \varphi(y)=Cy^2,\; C-const.$$

Подставляя полученное выражение для $\varphi(y)$ в (3.2), найдем общее решение системы.

Ответ: $u(x,y)=Cxy^2,\; C-$ произвольная постоянная.

Домашнее задание

Из Задания по теме 4:

Выясните, является ли система уравнений, где $u=u(x,y)$, совместной. Если система совместна, найдите ее решение:

1.4: $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=2y^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2y^2}+\dfrac{2u}{y}-2y^2; \end{cases}$$

05.12.2025

Занятие № 14. Системы уравнений в частных производных 1-го порядка с двумя независимыми переменными

Пример 1. Выяснить, является ли система уравнений совместной. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=u+yu, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=u^2+2xu; \end{cases}$$

Решение: Здесь $A(x,y,u)=u+yu,\ \ B(x,y,u)=u^2+2xu.$ Составим выражение:

$$A'_y+BA'_u-B'_x-AB'_u=u+(u^2+2xu)(1+y)-2u-(u+yu)(2u+2x)=$$
$$=-u(1+u+yu).$$

Приравняв его к нулю, получим: $u=0,\ \ u=-\dfrac{1}{y+1}.$ Подстановкой в уравнения системы убеждаемся, что эта функция $u=0$ является решением, а функция $u=-\dfrac{1}{y+1}$ – нет.

Ответ: $u=0.$

Пример 2. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \\ x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}; \end{cases} \tag{2.1}$$

Решение: Система (2.1) является линейной относительно производных. Разрешая ее, при условии $xy\neq 0,$ получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2y^2}{x(x^2+y^2)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Для полученной системы

$$A(x,y,u)=-\frac{2y^2}{x(x^2+y^2)},\quad B(x,y,u)=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Исследуем систему (2.2) на совместность. Составим выражение:

$$A'_y + BA'_u - B'_x - AB'_u = A'_y - B'_x =$$

$$= -\frac{2}{x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{4yx}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4yx}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4yx}{(x^2+y^2)^2} \equiv 0.$$

Условие совместности выполняется тождественно. Интегрируя второе уравнение системы (2.2), в котором переменная x рассматривается как параметр, получим:

$$u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \varphi(x). \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в первое уравнение системы (2.2):

$$\frac{2x}{x^2+y^2} + \varphi'(x) = -\frac{2y^2}{x(x^2+y^2)} \;\to\; \varphi'(x) = -\frac{2}{x} \xrightarrow{\;\int\;}$$

$$\to\; \varphi(x) = -\ln x^2 + C,\; C - const.$$

Подставляя полученное выражение для $\varphi(x)$ в (2.3), найдем общее решение системы (2.1).

Ответ: $u = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + C,\quad C -$ произвольная постоянная.

Пример 3. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 2(x-y)^3; \end{cases} \tag{3.1}$$

Решение: Разрешим систему (3.1) относительно производных следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 2(x-y)^3; \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^3 = 2(x-y)^3. \end{cases}$$

Отсюда получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -(x-y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = x-y. \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь $A(x,y,u) = -x+y, \quad B(x,y,u) = x-y$. Так как

$$A'_y + BA'_u - B'_x - AB'_u = A'_y - B'_x = 1-1 \equiv 0,$$

то система совместна. Интегрируя первое уравнение системы (3.2), в котором переменная x рассматривается как параметр, получим:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - xy + \varphi(x). \tag{3.3}$$

Подставим (3.3) во второе уравнение системы (3.2):

$$-y + \varphi'(x) = x - y \quad \to \quad \varphi'(x) = x \quad \xrightarrow{\int} \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 + C, \; C - const.$$

Подставляя полученное выражение для $\varphi(x)$ в (3.3), найдем общее решение системы (3.1):

$$u(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - xy + \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{y^2 - 2xy + x^2}{2} + C = \frac{(y-x)^2}{2} + C.$$

Ответ: $u(x,y) = \dfrac{1}{2}(x-y)^2 + C, \quad C -$ произвольная постоянная.

12.12.2025

Занятие № 15. Системы уравнений в частных производных 1-го порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим систему уравнений для искомой функции $u = u(x, y)$:

$$\begin{cases} F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ G\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Используя для частных производных **обозначения Монжа**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q,$$

систему (1) запишем в виде:

$$\begin{cases} F(x, y, u, p, q) = 0, \\ G(x, y, u, p, q) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Будем предполагать, что $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)} \neq 0.$

Выражение

$$[F,G] = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,p)} + p\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,p)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)} + q\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,q)} \tag{3}$$

называется **скобкой Майера.**

Замечания.

1. Здесь использованы стандартные обозначения для якобиана

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

2. Если система (1) разрешена относительно производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u), \end{cases}$$

то

$$F\left(x, y, u, p, q\right) = p - A(x, y, u, p, q),$$
$$G\left(x, y, u, p, q\right) = q - B(x, y, u, p, q),$$

и скобка Майера определяется выражением:

$$[F, G] = \frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\frac{\partial B}{\partial u}. \tag{4}$$

Условие совместности системы (1): Если $[F, G] = 0,$ то система (1) совместна.

Пример 1. Выяснить, является ли система уравнений совместной. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 2xy \end{cases} \tag{1.1}$$

Решение: Здесь

$$F\left(x, y, u, p, q\right) = xp - yq, \quad G\left(x, y, u, p, q\right) = u(xp + yq) - 2xy.$$

Скобка Майера:

$$[F, G] =$$

$$= \begin{vmatrix} p & x \\ up - 2y & xu \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} 0 & x \\ xp + yq & xu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -q & -y \\ qu - 2x & yu \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} 0 & -y \\ xp + yq & yu \end{vmatrix} =$$

$$=2xy-px(xp+yq)-2xy+qy(xp+yq)=-(xp+yq)(xp-qy)=0,$$

так как, согласно первому уравнению системы (1.1) имеем $xp-qy=0$.

Для системы (1.1) условие совместности выполнено.

Разрешим систему (1.1) относительно производных, рассматривая (1.1) как систему линейных однородных уравнений. В результате получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{u}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{u}. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Интегрируя первое уравнение системы (1.2), в котором переменная y рассматривается как параметр, получим:

$$u^2=2xy+\varphi(x). \qquad (1.3)$$

Дифференцируя равенство (1.3) по переменной y, получим

$$2uu'_y=2x+\varphi'(y) \quad \to \quad u'_y=\frac{2x+\varphi'(y)}{2u}.$$

Подставив полученное выражение для производной u'_y во второе уравнение системы (1.2), получим:

$$\frac{2x+\varphi'(y)}{2u}=\frac{x}{u} \quad \to \quad \varphi'(y)=0 \quad \xrightarrow{\int dy} \quad \varphi(y)=C,\ C-const.$$

Следовательно, $u^2=2xy+C$.

Ответ: $u^2=2yx+C,\quad C-$ произвольная постоянная.

Замечание. Если систему (1.1) сначала разрешить относительно производных, то, получив систему (1.2), можно исследовать ее на совместность, построив скобку Майера по формуле (4).

Так как $A(x,y,u)=\dfrac{y}{u}$ и $B(x,y,u)=\dfrac{x}{u}$, то

$$[F,G]=\frac{\partial A}{\partial y}+B\frac{\partial A}{\partial u}-\frac{\partial B}{\partial x}-A\frac{\partial B}{\partial u}=\frac{1}{u}+\frac{x}{u}\left(-\frac{y}{u^2}\right)-\frac{1}{u}-\frac{y}{u}\left(-\frac{x}{u^2}\right)=0.$$

Пример 2. Выяснить, является ли система уравнений совместной. Найти решение системы в случае ее совместности.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, \\ 2xy\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = u\left(y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y}\right); \end{cases} \tag{2.1}$$

$x > 0,\ y > 0.$

Решение: Запишем систему с использованием обозначений Монжа

$$\begin{cases} xp + yq = u, \\ 2xy\left[p^2 + q^2\right] = u\left(yp + xq\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

Используя первое уравнение системы (2.2), исключим переменную u из второго уравнения:

$$2xy(p^2 + q^2) = (xp + yq)\left(yp + xq\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy(p^2 + q^2) = xy(p^2 + q^2) + pq(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad xyp^2 - pqx^2 + xyq^2 - pqy^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad xp(yp - xq) + yq(xq - yp) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (yp - xq)(xp - yq) = 0.$$

Таким образом, система (2.2) равносильна следующей:

$$\begin{cases} xp + yq = u, \\ (yp - xq)(xp - yq) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

которая, распадается на две (линейные относительно производных):

$$\underbrace{\begin{cases} xp + yq = u, \\ yp - xq = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xp + yq = u, \\ xp - yq = 0. \end{cases}} \tag{2.4}$$

1. Разрешив первую систему относительно производных, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{ux}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{uy}{x^2+y^2}. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Здесь $A(x,y,u) = \dfrac{ux}{x^2+y^2}$ и $B(x,y,u) = \dfrac{uy}{x^2+y^2}$. Определим скобку Майера с помощью выражения (4):

$$[F,G] = \frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\frac{\partial B}{\partial u} =$$

$$= -\frac{2xyu}{(x^2+y^2)^2} + \frac{uy}{x^2+y^2}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2xyu}{(x^2+y^2)^2} - \frac{ux}{x^2+y^2}\frac{y}{x^2+y^2} = 0.$$

Условие совместности системы (2.5) выполнено. Интегрируя первое уравнение системы (2.5), в котором переменная y рассматривается как параметр, (методом разделения переменных) получим:

$$u(x,y) = \varphi(y)\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (2.6)$$

Подставим (2.6) во второе уравнение системы (2.5):

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi'(y)\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\varphi(y)y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \quad \to$$

$$\to \quad \varphi'(y) = 0 \quad \xrightarrow{\int dy} \varphi(y) = C,\ C - const.$$

Подставляя полученное выражение для $\varphi(y)$ в (2.6), найдем общее решение системы (2.5):

$$u(x,y) = C\sqrt{x^2+y^2}, \quad C - const.$$

2. Разрешив вторую систему совокупности (2.4) относительно производных, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u}{2x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{2y}. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Здесь $A(x,y,u) = \dfrac{u}{2x}$ и $B(x,y,u) = \dfrac{u}{2y}$. Определим скобку Майера с помощью выражения (4):

$$[F,G] = \frac{\partial A}{\partial y} + B\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial x} - A\frac{\partial B}{\partial u} = 0 + \frac{u}{2y}\cdot\frac{1}{2x} - 0 - \frac{u}{2x}\cdot\frac{1}{2y} = 0.$$

Условие совместности системы (2.7) выполнено. Интегрируя ее первое уравнение, в котором переменная y рассматривается как параметр, учитывая условие $x > 0$, получим:

$$u(x,y) = \varphi(y)\sqrt{x}. \qquad (2.8)$$

Подставим (2.8) во второе уравнение системы (2.7):

$$\varphi'(y)\sqrt{x} = \frac{\varphi(y)\sqrt{x}}{2y} \;\to\; \varphi'(y) = \frac{1}{2y} \xrightarrow{\int dy,\ y>0} \varphi(y) = C\sqrt{y}.$$

Подставляя полученное выражение для $\varphi(y)$ в (2.8), найдем общее решение системы (2.7):

$$u(x,y) = C\sqrt{xy}, \quad C - const.$$

Объединение решений систем (2.5) и (2.7) дает множество решений заданной системы (2.1).

Ответ: $u = C\sqrt{x^2 + y^2}, \quad u = C\sqrt{xy}.$

Замечание. Построение и анализ скобки Майера для системы (2.1) с помощью системы MathCAD приведен в [документе]()

Домашнее задание

Из Задания по теме 4:

Покажите, что система совместна и найдите ее решение:

3.3: $$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x, \\ x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = xu; \end{cases}$$