



05.10.2023

Самостоятельная работа N 1

«Простейшие уравнения в частных производных».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

Занятие № 5

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Общая схема преобразования уравнения

$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$		
Тип уравнения		
$B^2 - AC > 0$	$B^2 - AC = 0$	$B^2 - AC < 0$
гиперболический	параболический	эллиптический
Уравнение характеристик		
$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$		
Первые интегралы уравнения характеристик (семейства характеристик)		
$\varphi(x, y) = C_1,$ $\psi(x, y) = C_2$	$\varphi(x, y) = C$	$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1,$ $\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2$
Замена		

$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$	$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad J \neq 0$	$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$
$u(x, y) = v(\xi, \eta),$ $u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x,$ $u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y,$ $u_{xx} = v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx},$ $u_{yy} = v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy},$ $u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}$		
Канонический вид		
$v_{\xi\eta} = \Phi$	$v_{\eta\eta} = \Phi$	$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi$
где $\Phi = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$		

Гл. 2, § 5, с. 75: № 33 (1)

№ 33 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$$

Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости.

1) Определение типа уравнения:

$d = 1 > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип в любой точке плоскости.

2) Решение уравнения характеристик:

$$-2dydx - 4(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow dx(dy + 2dx) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ dy + 2dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ y + 2x = C_2. \end{cases}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x, \quad \eta = y + 2x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x, y + 2x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 1 & u_x = v_\xi + 2v_\eta \\ -2 & u_y = v_\eta \\ -4 & u_{yy} = v_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения. Подстановка построенных выражений в заданное уравнение дает:

$$2v_{\xi\eta} + v_\xi + v + \xi = 0 \Leftrightarrow v_{\xi\eta} + \frac{1}{2}v_\xi + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\xi = 0.$$



Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 68-75: разбор примеров.
с. 75, № 33(3).

12.10.2023

Занятие № 6

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Гл. 2, § 5, с. 76: № 34 (1), 35 (1)

№ 34 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 2 \sin x \cdot u_{xy} + (2 - \cos^2 x) \cdot u_{yy} = 0.$$

- 1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких x и y , при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).
- 2) Определение типа уравнения:

$$d = \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = -1 \Rightarrow \text{уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.}$$

- 3) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned}
 (dy)^2 + 2 \sin x \cdot dy dx + (2 - \cos^2 x)(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (dy + \sin x \cdot dx)^2 + (dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (dy + \sin x dx + i dx)(dy + \sin x dx - i dx) &= 0.
 \end{aligned}$$

Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y - \cos x + ix = C_1, \quad y - \cos x - ix = C_2.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y - \cos x, x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l}
 0 & u_x = \sin x \cdot v_\xi + v_\eta \\
 0 & u_y = v_\xi \\
 1 & u_{xx} = \sin^2 x \cdot v_{\xi\xi} + 2 \sin x \cdot v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + \cos x \cdot v_\xi \\
 2 - \cos^2 x & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
 -2 \sin x & u_{xy} = \sin x \cdot v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}
 \end{array}$$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2 \sin x - 2 \sin x = 0$	
v_ξ	$\cos x$	$\cos \eta$
v_η	0	

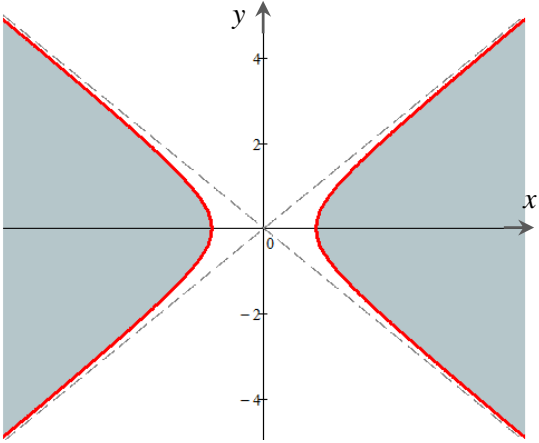

Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \cos \eta \cdot v_\xi = 0$.

№ 35 (1). Области параболичности, гиперболичности и эллиптичности уравнения: $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0$.

Дискриминант уравнения:

$$d = (xy)^2 + (1 - x^2)(1 + y^2) = 1 - x^2 + y^2.$$

Области, где сохраняются тип уравнения, описывают условия:

Область параболичности	Область гиперболичности	Область эллиптичности
$1 - x^2 + y^2 = 0$	$1 - x^2 + y^2 > 0$	$1 - x^2 + y^2 < 0$
<p>Уравнение $1 - x^2 + y^2 = 0$ на координатной плоскости Oxy определяет гиперболу, которая является границей областей</p> 		
	Между ветвями гиперболы	

№ 36 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$$

Определение типа уравнения:

$$d = x^2 - x \cdot (x-1) = x$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$

Область параболичности

При $x = 0$ уравнение принимает вид: $u_{yy} = 0$ (канонический)

Уравнение характеристик:

$$x(dy)^2 - 2xdxdy + (x-1)(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow x(dy - dx)^2 - (dx)^2 = 0.$$

$x > 0$	$x < 0$
$(\sqrt{x})^2 (dy - dx)^2 - (dx)^2 = 0.$	$(\sqrt{-x})^2 (dy - dx)^2 + (dx)^2 = 0.$

Область гиперболичности

$$(\sqrt{x})^2 (dy - dx)^2 - (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dy - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 0, \\ dy - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 0 \end{cases}$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2\sqrt{x} = c_1,$$

$$y - x - 2\sqrt{x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \\ \eta = y - x - 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$u(x, y) = v(y - x + 2\sqrt{x}, y - x - 2\sqrt{x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

0	$u_x = v_\xi \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_\eta \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
0	$u_y = v_\xi + v_\eta$
x	$u_{xx} = v_{\xi\xi} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2v_{\xi\eta} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\eta\eta} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - v_\xi \frac{1}{2x\sqrt{x}} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
x - 1	$u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$
2x	$u_{xy} = v_{\xi\xi} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\xi\eta} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\eta\eta} \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x \cdot \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$	
$v_{\eta\eta}$	$x \cdot \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$	

$v_{\xi\eta}$	$2x\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 2(x-1) - 4x = -4$	
v_{ξ}	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{\xi-\eta}$
v_{η}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{\xi-\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(v_{\xi} - v_{\eta}) = 0$.



Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: № 34 (2), 35 (2).

19.10.2023

Занятие № 7

Приведение уравнений к каноническому виду.

Продолжение решения [Задания 1](#)

Область эллиптичности

$$(\sqrt{-x})^2 (dy - dx)^2 + (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dy - \left(1 + \frac{i}{\sqrt{-x}}\right) dx = 0, \\ dy - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{-x}}\right) dx = 0 \end{cases}$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2i\sqrt{-x} = c_1,$$

$$y - x - 2i\sqrt{-x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x} \end{cases}$$

$$u(x, y) = v(y - x, 2\sqrt{-x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l}
 0 & u_x = -v_\xi - v_\eta \frac{1}{\sqrt{-x}} \\
 0 & u_y = v_\xi \\
 x & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{-x}} - v_{\eta\eta} \frac{1}{x} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \\
 x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
 2x & u_{xy} = -v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{-x}}
 \end{array}$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x + x - 1 - 2x = -1$	
$v_{\eta\eta}$	-1	
$v_{\xi\eta}$	$2x \frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0$	
v_ξ	0	
v_η	$\frac{1}{2\sqrt{-x}}$	$\frac{1}{\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} v_\eta = 0$.

Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$x u_{xx} - 4x^2 u_{xy} + 4x^3 u_{yy} + u_x - 4x u_y - x(y + x^2) = 0. \quad (1)$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости за исключением точек прямой $x = 0$.

2) Определение типа уравнения:

$$d = 4x^4 - 4x^4 = 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет параболический тип.}$$

3) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned}
 x(dy)^2 + 4x^2 dy dx + 4x^3 (dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dy + 2x dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow dy + 2x dx = 0 \Rightarrow y + x^2 = C.
 \end{aligned}$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y + x^2, x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 1 & u_x = 2xv_\xi + v_\eta \\ -4x & u_y = v_\xi \\ x & u_{xx} = 4x^2v_{\xi\xi} + 4xv_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + 2v_\xi \\ 4x^3 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\ -4x^2 & u_{xy} = 2xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} \end{array}$$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η	Свободное слагаемое
0	x	0	0	1	$-x(y + x^2)$
	η			1	$-\xi\eta$
	$\eta \neq 0$				

Канонический вид:

$$\eta v_{\eta\eta} + v_\eta = \xi\eta \quad (2)$$

Замечание. Так как переменная η может быть задана любым выражением, при котором преобразование независимых переменных будет невырожденным, то и канонический вид может быть другим. Так, если новые переменные ввести следующим образом:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = y, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta),$$

то канонический вид для уравнения (1) будет следующим:

$$(\xi - \eta)v_{\eta\eta} - v_\eta = \frac{\xi}{4}.$$

7) Построение общего решения уравнения (2):

$$\eta v_{\eta\eta} + v_{\eta} = \xi \eta \Leftrightarrow (\eta v_{\eta})'_{\eta} = \xi \eta,$$

$$\eta v_{\eta} = \frac{\xi \eta^2}{2} + C(\xi), \quad v_{\eta} = \frac{\xi \eta}{2} + \frac{C(\xi)}{\eta},$$

$$v(\xi, \eta) = \frac{\xi \eta^2}{4} + C(\xi) \ln|\eta| + \Phi(\xi).$$

8) Возвращаясь к старым переменным x, y, u , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \frac{x^2(y+x^2)}{4} + C(y+x^2) \ln|x| + \Phi(y+x^2) \quad (3)$$



Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: № 36 (4).

26.10.2023

Занятие № 8

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

С. 86, № 40 (1).

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x, 0) = 3x^2, \quad u_y(x, 0) = 0.$

1) Определение типа уравнения:

$$d = 1 + 3 = 4 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 - 2dydx - 3(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (dy - dx)^2 - 4(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dy - 3dx = 0, \\ dy + dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3x = C_1, \\ y + x = C_2. \end{cases}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y + x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y - 3x, y + x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l|l} 0 & u_x = -3v_\xi + v_\eta \\ 0 & u_y = v_\xi + v_\eta \\ 1 & u_{xx} = 9v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ -3 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = -3v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η
0	0	-16	0	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0. \quad (2)$$

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad v_\xi = C(\xi), \quad v(\xi, \eta) = \int C(\xi) d\xi + F(\eta) = \Phi(\xi) + F(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(y - 3x) + F(y + x). \quad (3)$$

8) Построение частного решения

Найдем производную:

$$u_y(x, y) = \Phi'(y - 3x) + F'(y + x).$$

Подставляя (3) в заданные условия $u(x, 0) = 3x^2$, $u_y(x, 0) = 0$, получим систему для нахождения функций F и Φ :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \Phi(-3x) + F(x) = 3x^2, \\ u_y(x, 0) = \Phi'(-3x) + F'(x) = 0. \end{cases}$$

Решение системы (методом подстановки)

$$\begin{cases} F(x) = 3x^2 - \Phi(-3x), \\ \Phi'(-3x) + 6x + 3\Phi'(-3x) = 0 \end{cases}$$

$$\Phi'(-3x) = -\frac{3x}{2}, \quad \Phi'(t) = \frac{t}{2}, \quad \Phi(t) = \frac{t^2}{4} + C, \quad C - \text{const.}$$

Подставляя полученное выражение для Φ в первое уравнение системы, найдем

$$F(x) = 3x^2 - \frac{9x^2}{4} - C = \frac{3x^2}{4} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{(y-3x)^2}{4} + \frac{3(y+x)^2}{4} = y^2 + 3x^2.$$

№ 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y - 4)u_{xx} - 2 \sin y \cdot u_{xy} + u_{yy} - \cos y \cdot u_x = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(\cos y, y) = \cos y$, $u_x(\cos y, y) = \sin y$.

1) Определение типа уравнения:

$$d = \sin^2 y - (\sin^2 y - 4) = 4 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned} (\sin^2 y - 4)(dy)^2 + 2 \sin y dy dx + (dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dx + \sin y dy)^2 - 4(dy)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx + (\sin y - 2)dy = 0, \\ dx + (\sin y + 2)dy = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \cos y - 2y = C_1, \\ x - \cos y + 2y = C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x - \cos y - 2y, \quad \eta = x - \cos y + 2y, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x - \cos y - 2y, x - \cos y + 2y).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$-\cos y$	$u_x = v_\xi + v_\eta$
0	$u_y = (\sin y - 2)v_\xi + (\sin y + 2)v_\eta$
$(\sin^2 y - 4)$	$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$
1	$u_{yy} = (\sin y - 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 y - 4)v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)^2 v_{\eta\eta} + \cos y \cdot v_\xi + \cos y \cdot v_\eta$
$-2\sin y$	$u_{xy} = (\sin y - 2)v_{\xi\xi} + 2\sin y \cdot v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)v_{\eta\eta}$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y - 2)^2 - 2\sin y(\sin y - 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y + 2)^2 - 2\sin y(\sin y + 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y - 4) + 2(\sin^2 y - 4) - 4\sin^2 y = -16$
v_ξ	$-\cos y + \cos y = 0$
v_η	$-\cos y + \cos y = 0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta). \quad (2)$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u , получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(x - \cos y - 2y) + \Psi(x - \cos y + 2y). \quad (3)$$



Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 86: № 40 (2).

8) Построение частного решения

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ :

$$\begin{cases} u(\cos y, y) = \Phi(-2y) + F(2y) = \cos y, \\ u_x(\cos y, y) = \Phi'(-2y) + F'(2y) = \sin y. \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y) + 2F'(2y) = -\sin y \Rightarrow \Phi'(-2y) = \frac{1}{2}\sin y + F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\frac{1}{2}\sin y + F'(2y) + F'(2y) = \sin y \Rightarrow F'(2y) = \frac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t) = \frac{1}{4}\sin \frac{t}{2}, \quad F(t) = -\frac{1}{2}\cos \frac{t}{2} + C, \quad C - const.$$

Найденное выражение для функции F подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y) - \frac{1}{2}\cos y + C = \cos y \Rightarrow \Phi(-2y) = \frac{3}{2}\cos y - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{3}{2}\cos \frac{t}{2} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = \frac{3}{2}\cos \frac{x - \cos y - 2y}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{x - \cos y + 2y}{2}.$$

02.11.2023

Занятие № 9

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

Разбор примерного варианта контрольной работы

1. Укажите области на плоскости XOY , где сохраняется тип уравнения:

$$y u_{xx} - x(\cos \pi x + 1)u_{yy} + x u_x - u = 0$$




2. Решите задачу Коши:

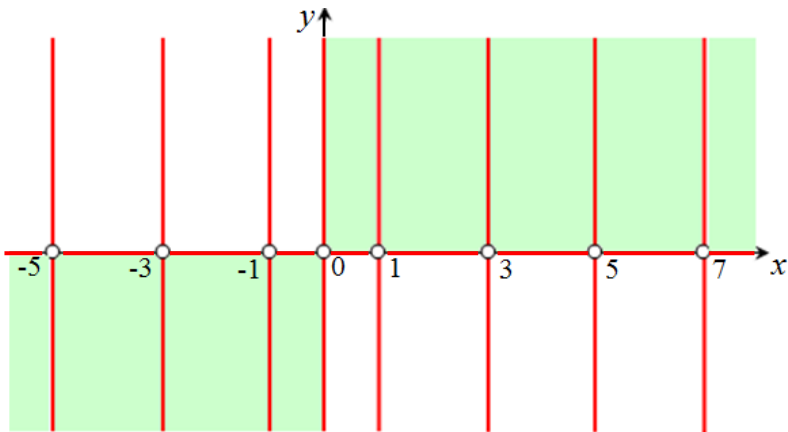
$$u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (4 - \sin^2 x)u_{yy} + 8u_x - (16 + 8 \sin x + \cos x)u_y = 0,$$

$$u(x, \cos x) = e^{-6x} + 2x, \quad u_y(x, \cos x) = 1 - e^{-6x}.$$

Задание 1. Область, в которой уравнение не является уравнением второго порядка, определяется условиями:

$$\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0, \\ y = 0, \\ \cos \pi x = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \{(0,0), (2k+1,0), k \in \mathbb{Z}\}$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$xy(\cos \pi x + 1) = 0$	$xy(\cos \pi x + 1) > 0$	$xy(\cos \pi x + 1) < 0$
$\left[\begin{array}{l} x = 0, y \neq 0 \\ y = 0, x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} xy > 0, \\ x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} xy < 0, \\ x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$
		



Задание 2

1. Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 x + 4 - \sin^2 x = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2. Решение уравнения характеристик:

$$\begin{aligned}
 (dy)^2 + 2 \sin x dy dx - (4 - \sin^2 x)(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (dy + \sin x dx)^2 - 4(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} dy + (\sin x + 2)dx = 0, \\ dy + (\sin x - 2)dx = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y - \cos x + 2x = C_1, \\ y - \cos x - 2x = C_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

3. Переход к новым переменным:

$$\begin{aligned}
 \xi &= y - \cos x + 2x, \quad \eta = y - \cos x - 2x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta). \\
 u(x, y) &= v(y - \cos x + 2x, y - \cos x - 2x).
 \end{aligned}$$

4. Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{l}
 8 \\
 -16 - 8 \sin x - \cos x
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 u_x = v_\xi (\sin x + 2) + v_\eta (\sin x - 2) \\
 u_y = v_\xi + v_\eta
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l|l}
 1 & u_{xx} = (\sin x + 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 x - 4)v_{\xi\eta} + (\sin x - 2)^2 v_{\eta\eta} + \\
 & \quad + \cos x \cdot v_{\xi} + \cos x \cdot v_{\eta} \\
 (\sin^2 x - 4) & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
 -2\sin x & u_{xy} = (\sin x + 2)v_{\xi\xi} + 2\sin x \cdot v_{\xi\eta} + (\sin x - 2)v_{\eta\eta}
 \end{array}$$

5. Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x - 4 + (\sin x + 2)^2 - 2\sin x(\sin x + 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 x - 4 + (\sin x - 2)^2 - 2\sin x(\sin x - 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 x - 4) + 2(\sin^2 x - 4) - 4\sin^2 x = -16$
v_{ξ}	$8\sin x + 16 - 16 - 8\sin x = 0$
v_{η}	$8\sin x - 16 - 16 - 8\sin x = -32$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} + 2v_{\eta} = 0$$

6. Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi, \eta) = e^{-2\xi} \Phi(\eta) + F(\xi). \quad (2)$$

7. Возвращаясь к старым переменным x, y, u , получим общее решение уравнения заданного уравнения:

$$u(x, y) = e^{-2(y - \cos x + 2x)} \Phi(y - \cos x - 2x) + F(y - \cos x + 2x). \quad (3)$$

8. Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(x, \cos x) = e^{-6x} + 2x, \quad u_y(x, \cos x) = 1 - e^{-6x},$$

получим систему для нахождения функций F и Φ :

$$\begin{cases}
 e^{-4x} \Phi(-2x) + F(2x) = e^{-6x} + 2x, \\
 e^{-4x} \Phi'(-2x) - 2e^{-4x} \Phi(-2x) + F'(2x) = 1 - e^{-6x}.
 \end{cases}$$

Выполнив в системе замену $t = 2x$, будем иметь

$$\begin{cases}
 e^{-2t} \Phi(-t) + F(t) = e^{-3t} + t, \\
 e^{-2t} \Phi'(-t) - 2e^{-2t} \Phi(-t) + F'(t) = 1 - e^{-3t}.
 \end{cases} \quad (4)$$

9. Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$e^{-2t}(-2\Phi(-t) - \Phi'(-t)) + F'(t) = -3e^{-3t} + 1 \Rightarrow$$

$$F'(t) = -3e^{-3t} + 1 + e^{-2t}(2\Phi(-t) + \Phi'(-t)).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$e^{-2t}\Phi'(-t) - 2e^{-2t}\Phi(-t) - 3e^{-3t} + 1 + e^{-2t}(2\Phi(-t) + \Phi'(-t)) = 1 - e^{-3t},$$

$$\Phi'(-t) = e^{-t}, \quad \Phi(t) = e^t + C, \quad C - const.$$

$F(t)$ найдем из первого уравнения системы (4):

$$F(t) = e^{-3t} + t - e^{-2t}(e^{-t} + C) = t - Ce^{-2t}.$$

10. Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$u(x, y) = y - \cos x + 2x + e^{-y + \cos x - 6x}$$



Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (5а).

09.11.2023

Занятие № 10

Контрольная работа № 1

Канонический вид уравнения в частных производных Метод характеристик. Задача Коши.