Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

09.09.2024

Занятие № 2. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения методом характеристик.

Гл. 2, § 3, с. 64

№ 11:

Замечание о вычислении производных функции

$$u(x,y) = x + y + f(xy),$$

где $f(z)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция:

$$u_x(x,y) = 1 + f'(xy)\cdot y,$$

$$u_y(x,y) = 1 + f'(xy)\cdot x$$

№ 13 (1): Принимая ξ и η за новые переменные, преобразовать уравнение $xu_x + \sqrt{1+y^2}\cdot u_y = xy$, если $\xi = \ln x$, $\eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Построим выражения для производных функции $u(x,y)$ при переходе к новым переменным $u(x,y) = v\left(\xi(x,y), \eta(x,y)\right)$:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{x} v_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\cdot\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) v_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} v_\eta.$$

Подставив выражения для производных в уравнение

$$xu_x + \sqrt{1+y^2}\cdot u_y = xy,$$

учитывая связь между старыми и новыми переменными:

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{\xi}, \\ y = \dfrac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \operatorname{sh}\eta \end{cases}$$

получим: $\boxed{v_{\xi} + v_{\eta} = e^{\xi}\operatorname{sh}\eta.}$

Построение общего решения уравнений *методом характеристик*[1].

№ 14 (1). $yu_x - xu_y = 0$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

2) Решая уравнение характеристик методом разделения переменных, найдем его первый интеграл:

$$x^2 + y^2 = C.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$\boxed{u(x,y) = F(x^2 + y^2),}$$

где $F(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

№ 15 (1). $xu_x + yu_y + zu_z = 0$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{z}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}. \end{cases}$$

2) Решая уравнения характеристик, найдем два первых интеграла:

---

[1] http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/UMF/Lections/Urav_Pp.pdf (Теорема 2).

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{x}{z} = C_2.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$\boxed{u(x, y, z) = F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).}$$

где $F(a,b)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для построения первых интегралов характеристической системы можно использовать *правило равных дробей:*

Если имеются равные дроби

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

и произвольные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *такие, что* $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \neq \neq 0$, *то*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n}.$$

Пример построения первых интегралов для системы[2]:

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

По свойству равных дробей имеем

$$\frac{dx - dz}{z - y} = \frac{dy - dz}{z - x} \Rightarrow (x - z)d(x - z) = (y - z)d(y - z).$$

Интегрируя последнее равенство, получим первый интеграл

$$\psi_1(x, y, z) = (x - z)^2 - (y - z)^2 = (x - y)(x + y - 2z).$$

---

[2] **Дифференциальные и интегральные уравнения**: учебное пособие для студентов физико-технического факультета: в 3 ч. Часть 2 / сост.: Н. Ю. Светова, Е. Е. Семёнова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014, 76 с. (стр. 61).

По свойству равных дробей составим еще одно равенство

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}=\frac{dx-dy}{x-y} \Leftrightarrow \frac{d(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{2d(x-y)}{x-y},$$

интегрирование которого дает еще один первый интеграл

$$\psi_2(x,y,z)=\frac{x+y+z}{(x-y)^2}$$

Построить общее решение уравнения

$$(z-y)u_x+zu_y+yu_z=0.$$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{z}=\dfrac{dz}{y}, \\ \boxed{\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy-dz}{z-y}}. \end{cases}$$

Интегрируемая комбинация составлена с использованием правила равных дробей.

2) Решая уравнения характеристик, найдем два первых интеграла:

$$y^2-z^2=C_1, \quad x-y+z=C_2.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$u(x,y,z)=F\left(y^2-z^2, x-y+z\right).$$

где $F(a,b)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Гл. 2, § 3, с. 64: № 14 (5) $\quad yu_x+xu_y=x^2+y^2, \quad x\neq 0, \; y\neq 0.$

<u>1 способ.</u>

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x} \quad \Leftrightarrow \quad xdx-ydy=0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x^2 - y^2 = C.$

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v\big(\xi(x, y), \eta(x, y)\big)$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение получим:

$$yv_\eta = x^2 + y^2 \quad \to \quad v_\eta = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

4) Выразим правую часть уравнения через новые переменные. Так как

$$x = \eta, \quad y^2 = \eta^2 - \xi,$$

то

$$v_\eta = \begin{cases} \dfrac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}}, & \text{когда } y > 0, \\ \dfrac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}}, & \text{когда } y < 0. \end{cases}$$

5) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

А) когда $y > 0$ (при этом $y = \sqrt{\eta^2 - \xi}$),

$$v_\eta = \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}} \quad \to \quad v = \int \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}} d\eta + C(\xi) \quad \to$$

$$\to \quad v = \eta\sqrt{\eta^2 - \xi} + C(\xi);$$

Б) когда $y < 0$ (при этом $y = -\sqrt{\eta^2 - \xi}$),

$$v_\eta = \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}} \quad \to \quad v = \int \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}} d\eta + C(\xi) \quad \to$$

$$\to \quad v = -\eta\sqrt{\eta^2 - \xi} + C(\xi);$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

6) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x, y) = xy + C(x^2 - y^2).}$$

Заметим, что слагаемое xy является частным решением неоднородного уравнения, а второе слагаемое – общим решением соответствующего однородного уравнения.

<u>2 способ. Метод решения квазилинейных уравнений.</u>

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{x^2 + y^2}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = C_1.$$

3) Для нахождения еще одного первого интеграла, составим интегрируемую комбинацию, используя правило равных дробей:

$$\frac{ydx + xdy}{y^2 + x^2} = \frac{du}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad du - d(xy) = 0 \quad \Rightarrow \quad u - xy = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\Phi\left(x^2 - y^2, u - xy\right) = 0.$$

5) Из уравнения можно получить явное выражение для $u(x,y)$:

$$\boxed{u - xy = F(x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = xy + F(x^2 - y^2).}$$

Домашнее задание

С. 64-65: №№ 12, 13 (2), 14(2).

Рассмотреть примерный вариант самостоятельной работы № 1.

16.09.2024

Занятие № 3. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения. Задача Коши

Гл. 2, § 3, с. 64-65

№ 14 (6). $xyu_x + (x-2u)u_y = yu$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2u} = \frac{du}{yu}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{du}{yu} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{x} = C_1.$$

3) Второй первый интеграл можно найти, решая систему:

$$\begin{cases} u = C_1 x, \\ \dfrac{dx}{xy} = \dfrac{dy}{x-2u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ \dfrac{dx}{yx} = \dfrac{dy}{x(1-2C_1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ (1-2C_1)dx = ydy \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ 2(1-2C_1)x - y^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - 4u - y^2 = C_2.$$

Замечание. Для нахождения еще одного первого интеграла можно было составить интегрируемую комбинацию, используя правило равных дробей:

$$\frac{dx - ydy}{xy - (xy - 2yu)} = \frac{2du}{2yu} \quad \Rightarrow$$

$$dx - ydy - 2du = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y^2 - 4u = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\boxed{\Phi\left(\frac{u}{x}, 2x - y^2 - 4u\right) = 0.}$$

Решение заданного уравнения получено ***в неявной форме****.*

№ 14 (7). $\frac{1}{x}u_x + \frac{1}{y}u_y = \frac{u}{y^2}$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$xdx = ydy = \frac{y^2 du}{u}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$xdx = ydy \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = C_1.$$

3) Второй первый интеграл найдем, решая уравнение:

$$ydy = \frac{y^2 du}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{y} = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\boxed{\Phi\left(x^2 - y^2, \frac{u}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = yF(x^2 - y^2).}$$

№ 15 (3). $x^2 u_x + y^2 u_y + z^2 u_z = u$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u}.$$

2) Найдем три первых интеграла, решая уравнения:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1,$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = C_2,$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad u \cdot e^{1/x} = C_3.$$

3) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y,z)$:

$$\Phi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z}, u \cdot e^{1/x}\right) = 0,$$

разрешая которое относительно u, получим:

$$\boxed{u(x,y,z)=e^{-1/x}F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)}$$

№ 15 (4). $u_x+2u_y+u_z=xyz.$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$dx=\frac{dy}{2}=dz=\frac{du}{xyz}.$$

2) Найдем три первых интеграла, решая уравнения:

$$dx=\frac{dy}{2}\quad\Rightarrow\quad 2x-y=C_1,$$

$$dx=dz\quad\Rightarrow\quad x-z=C_2.$$

3) Из уравнения $dx=\dfrac{du}{xyz}$ исключим переменные y z, используя два первых интеграла в п. 2. Получим

$$dx=\frac{du}{x(2x-C_1)(x-C_2)}\quad\Rightarrow\quad x(2x-C_1)(x-C_2)dx=du.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$u-\frac{x^4}{2}+(2C_2+C_1)\frac{x^3}{3}-C_1C_2\frac{x^2}{2}=C_3.$$

Из последнего равенства, исключив C_1 и C_2, найдем еще один первый интеграл:

$$u-\varphi(x,y,z)=C_3,$$

где $\phi(x,y,z)=\dfrac{x^4}{2}-(4x-y-2z)\dfrac{x^3}{3}+(x-z)(2x-y)\dfrac{x^2}{2}.$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y,z)$:

$$\Phi(x-z,y-2z,u-\varphi(x,y,z))=0,$$

разрешая которое относительно u, получим:

$$\boxed{u(x,y,z)=F(x-z.y-2z)+\varphi(x,y,z).}$$

Дополнение к № 13(1). Построить общее решение уравнения:

$$v_\xi+v_\eta=e^\xi\operatorname{sh}\eta.$$

Применить метод решения квазилинейных уравнений:

1) построить два независимых первых интеграла для характеристической системы:

$$\begin{cases} d\xi = d\eta, \\ d\eta = \dfrac{dv}{e^{\xi}\,\mathrm{sh}\eta}. \end{cases}$$

Первые интегралы: $\xi - \eta = C_1, \qquad \dfrac{e^{\xi-\eta}\left(e^{2\eta}-2\eta\right)}{4} - v = C_2.$

2) составить уравнение для нахождения v:

$$\Phi(\xi-\eta, \frac{e^{\xi-\eta}\left(e^{2\eta}-2\eta\right)}{4} - v) = 0 \qquad (*)$$

3) разрешить уравнение (*) относительно v:

$$\boxed{v(\xi,\eta) = \frac{e^{\xi-\eta}\left(e^{2\eta}-2\eta\right)}{4} - F(\xi-\eta).}$$

№ 17 (1): $xu_x + yu_y = 1, \quad u(x,1) = x.$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = du.$$

2) Решая систему, найдем два независимых первых интеграла:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = C_1;$$

$$\frac{dy}{y} = du \quad \Rightarrow \quad u - \ln|y| = C_2.$$

3) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, u - \ln|y|\right) = 0.$$

4) Из полученного уравнения найдем: $u(x,y) = F\left(\frac{x}{y}\right) + \ln|y|$

Задача Коши. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Для нахождения функции F используем условие $u(x,1)=x$:

$$u(x,1)=F(x)=x.$$

Решение задачи Коши: $\boxed{u(x,y)=\frac{x}{y}+\ln|y|.}$

№ 17 (3): $xu_x+yu_y=2xy, \quad u(x,x)=x^2.$

<u>Задача Коши</u>. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Общее решение: $u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+xy$

Для нахождения функции F используем условие $u(x,x)=x$:

$$u(x,x)=F(1)+x^2=x^2 \Rightarrow F(1)=0.$$

Решение задачи Коши: $u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+xy,$ где F – произвольная дифференцируемая функция, для которой F (1)=0.

Домашнее задание

С. 64-65: №№ 14 (3,4), 15(2), 17 (2).

23.09.2024

Занятие № 4. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения. Задача Коши

№ 17 (6): $x^2u_x-xyu_y=-y^2, \quad u(x,x)=1+\frac{x}{3}.$

1) Характеристическая система:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{du}{-y^2}$$

2) Первые интегралы характеристической системы:

$$xy = C_1, \quad u - \frac{y^2}{3x} = C_2.$$

3) Общее решение: $u(x, y) = \dfrac{y^2}{3x} + F(xy).$

4) Частное решение:

$$u(x, x) = \frac{x}{3} + F(x^2) = 1 + \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad F(t) = 1,$$

$$\boxed{u(x, y) = \frac{y^2}{3x} + 1.}$$

№ 17 (7): $xu_x + yu_y = u - xy, \quad u(x, 2) = 1 + x^2.$

1) Характеристическая система:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy}$$

2) Первые интегралы характеристической системы:

a) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \quad \dfrac{x}{y} = C_1.$

b) Решая уравнение:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy},$$

при условии $x = yC_1$:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y} - C_1 y, \quad u = C_2 y - C_1 y^2 = C_2 y - xy,$$

найдем еще один первый интеграл:

$$\frac{u + xy}{y} = C_2.$$

3) Общее решение: $u(x, y) = yF\left(\dfrac{x}{y}\right) - xy.$

4) Частное решение:

$$u(x,2)=2F\left(\frac{x}{2}\right)-2x=1+x^2 \;\Rightarrow\; F\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{(x+1)^2}{2},\quad F(t)=\frac{(2t+1)^2}{2}.$$

$$u(x,y)=y\cdot\frac{\left(2x/y+1\right)^2}{2}-xy=\frac{(2x+y)^2}{2y}-xy.$$

№ 18 (1): $xu_x+yu_y+zu_z=0,\quad u(1,y,z)=y^2+z^2.$

1) Общее решение уравнения (см. № 15(1)):
   $u(x,y,z)=F\left(\frac{x}{y},\frac{x}{z}\right)$
2) Выделение частного решения (решение задачи Коши):
   $$u(1,y,z)=F\left(\tfrac{1}{y},\tfrac{1}{z}\right)=y^2+z^2 \;\Rightarrow\; F(y,z)=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}.$$
   Следовательно,
   $$u(x,y,z)=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2,\quad u(x,y,z)=\frac{y^2+z^2}{x^2}.$$

№ 18 (2): $u_x+u_y+u_z=xyz,\quad u(0,y,z)=y-z.$

1) Общее решение уравнения (см. № 15(2)):
   $$u(x,y,z)=\frac{x^4}{4}-\frac{(2x-y-z)^2x^3}{3}+\frac{(x-y)(x-z)x^2}{2}+F(x-y,x-z).$$

2) Выделение частного решения (решение задачи Коши):
   $u(0,y,z)=F(-y,-z)=y-z \;\Rightarrow\; F(y,z)=z-y.$
   Следовательно,
   $$u(x,y,z)=\frac{x^4}{4}-\frac{(2x-y-z)^2x^3}{3}+\frac{(x-y)(x-z)x^2}{2}+y-z.$$

Домашнее задание

С. 65: №№ 17 (2, 5), 19.

Подготовка к самостоятельной работе (**30.09.24**) по теме: «Простейшие уравнения в частных производных. Метод характеристик».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

Самостоятельная работа № 1 (часть 2).

Варианты заданий

Срок выполнения – **31.10.24**