Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

14.09.2023

Занятие № 2. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения методом характеристик.

Гл. 2, § 3, с. 64

№ 11:

Замечание о вычислении производных функции

$$u(x, y) = x + y + f(xy),$$

где $f(z)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция:

$$u_x(x, y) = 1 + f'(xy) \cdot y,$$
$$u_y(x, y) = 1 + f'(xy) \cdot x$$

№ 13 (1): Принимая ξ и η за новые переменные, преобразовать уравнение $xu_x + \sqrt{1+y^2} \cdot u_y = xy,$ если $\xi = \ln x,\ \eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Построим выражения для производных функции $u(x, y)$ при переходе к новым переменным $u(x, y) = v\left(\xi(x, y), \eta(x, y)\right)$:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{x} v_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) v_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} v_\eta.$$

Подставив выражения для производных в уравнение

$$xu_x + \sqrt{1+y^2} \cdot u_y = xy,$$

учитывая связь между старыми и новыми переменными:

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{\xi}, \\ y = \dfrac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \operatorname{sh}\eta \end{cases}$$

получим: $\boxed{v_{\xi} + v_{\eta} = e^{\xi}\operatorname{sh}\eta.}$

Домашнее задание

С. 64-65: №№ 12, 13 (2).
Рассмотреть примерный вариант [самостоятельной работы № 1](#).

21.09.2023

Занятие № 3. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения.

Построение общего решения уравнений *методом характеристик*[1].

№ 14 (1). $yu_x - xu_y = 0$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

2) Решая уравнение характеристик методом разделения переменных, найдем его первый интеграл:

$$x^2 + y^2 = C.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$\boxed{u(x, y) = F(x^2 + y^2),}$$

где $F(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

---

[1] http://math-it.petrsu.ru/users/semenova/UMF/Lections/Urav_Pp.pdf (Теорема 2).

№ 15 (1). $xu_x + yu_y + zu_z = 0$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}. \end{cases}$$

2) Решая уравнения характеристик, найдем два первых интеграла:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{x}{z} = C_2.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$\boxed{u(x,y,z) = F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).}$$

где $F(a,b)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для построения первых интегралов характеристической системы можно использовать *правило равных дробей:*

Если имеются равные дроби

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

и произвольные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *такие, что* $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \neq$ $\neq 0$, *то*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n}.$$

Пример построения первых интегралов для системы[2]:

[2] **Дифференциальные и интегральные уравнения**: учебное пособие для студентов физико-технического факультета: в 3 ч. Часть 2 / сост.: Н. Ю. Светова, Е. Е. Семёнова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014, 76 с. (стр. 61).

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

По свойству равных дробей имеем

$$\frac{dx-dz}{z-y} = \frac{dy-dz}{z-x} \Rightarrow (x-z)d(x-z) = (y-z)d(y-z).$$

Интегрируя последнее равенство, получим первый интеграл

$$\psi_1(x,y,z) = (x-z)^2 - (y-z)^2 = (x-y)(x+y-2z).$$

По свойству равных дробей составим еще одно равенство

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)} = \frac{dx-dy}{x-y} \Leftrightarrow \frac{d(x+y+z)}{x+y+z} = \frac{2d(x-y)}{x-y},$$

интегрирование которого дает еще один первый интеграл

$$\psi_2(x,y,z) = \frac{x+y+z}{(x-y)^2}$$

Построить общее решение уравнения

$$(z-y)u_x + zu_y + yu_z = 0.$$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}, \\ \boxed{\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy-dz}{z-y}}. \end{cases}$$

Интегрируемая комбинация составлена с использованием правила равных дробей.

2) Решая уравнения характеристик, найдем два первых интеграла:

$$y^2 - z^2 = C_1, \quad x - y + z = C_2.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$u(x,y,z) = F\left(y^2 - z^2, x - y + z\right).$$

где $F(a,b)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Гл. 2, § 3, с. 64: № 14 (5) $yu_x + xu_y = x^2 + y^2,\ \ x \neq 0,\ y \neq 0.$

1 способ.

1) Составляем уравнение характеристик:
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \quad \Leftrightarrow \ xdx - ydy = 0.$$
2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x^2 - y^2 = C.$
3) Введем новые переменные:
$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$
Так как $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0,$ то преобразование является невырожденным.

Для $u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big)$ найдем:
$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$
$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi.$$
После подстановки найденных выражений в заданное уравнение получим:
$$yv_\eta = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad v_\eta = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$
4) Выразим правую часть уравнения через новые переменные. Так как
$$x = \eta, \ \ y^2 = \eta^2 - \xi,$$
то
$$v_\eta = \begin{cases} \dfrac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}}, & \text{когда } y > 0, \\[2ex] \dfrac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}}, & \text{когда } y < 0. \end{cases}$$
5) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

А) когда $y > 0$ (при этом $y = \sqrt{\eta^2 - \xi}$),

$$v_\eta = \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}} \;\rightarrow\; v = \int \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}} d\eta + C(\xi) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; v = \eta\sqrt{\eta^2 - \xi} + C(\xi);$$

Б) когда $y < 0$ (при этом $y = -\sqrt{\eta^2 - \xi}$),

$$v_\eta = \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}} \;\rightarrow\; v = \int \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}} d\eta + C(\xi) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; v = -\eta\sqrt{\eta^2 - \xi} + C(\xi);$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

6) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$\boxed{u(x, y) = xy + C(x^2 - y^2).}$$

Заметим, что слагаемое xy является частным решением неоднородного уравнения, а второе слагаемое – общим решением соответствующего однородного уравнения.

<u>2 способ. Метод решения квазилинейных уравнений.</u>

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{x^2 + y^2}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = C_1.$$

3) Для нахождения еще одного первого интеграла, составим интегрируемую комбинацию, используя правило равных дробей:

$$\frac{ydx + xdy}{y^2 + x^2} = \frac{du}{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; du - d(xy) = 0 \;\Rightarrow\; u - xy = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\Phi\left(x^2 - y^2, u - xy\right) = 0.$$

5) Из уравнения можно получить явное выражение для $u(x,y)$:

$$\boxed{u - xy = F(x^2 - y^2) \;\Rightarrow\; u(x, y) = xy + F(x^2 - y^2).}$$

№ 14 (6). $xyu_x + (x-2u)u_y = yu$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2u} = \frac{du}{yu}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{du}{yu} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{x} = C_1.$$

3) Второй первый интеграл можно найти, решая систему:

$$\begin{cases} u = C_1 x, \\ \dfrac{dx}{xy} = \dfrac{dy}{x-2u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ \dfrac{dx}{yx} = \dfrac{dy}{x(1-2C_1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ (1-2C_1)dx = ydy \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ 2(1-2C_1)x - y^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - 4u - y^2 = C_2.$$

Замечание. Для нахождения еще одного первого интеграла можно было составить интегрируемую комбинацию, используя правило равных дробей:

$$\frac{dx - ydy}{xy - (xy - 2yu)} = \frac{2du}{2yu} \quad \Rightarrow$$

$$dx - ydy - 2du = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y^2 - 4u = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\boxed{\Phi\left(\frac{u}{x}, 2x - y^2 - 4u\right) = 0.}$$

Решение заданного уравнения получено ***в неявной форме***.

№ 14 (7). $\frac{1}{x}u_x + \frac{1}{y}u_y = \frac{u}{y^2}$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$xdx = ydy = \frac{y^2 du}{u}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$xdx = ydy \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = C_1.$$

3) Второй первый интеграл найдем, решая уравнение:

$$ydy = \frac{y^2 du}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{y} = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\boxed{\Phi\left(x^2 - y^2, \frac{u}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = yF(x^2 - y^2).}$$

Домашнее задание

С. 64-65: №№ 14 (2,3,4), 15 (2).

Рассмотреть примерный вариант [самостоятельной работы № 1]

28.09.2023

Занятие № 4. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения. Задача Коши

Гл. 2, § 3, с. 64-65

№ 15 (3). $x^2 u_x + y^2 u_y + z^2 u_z = u$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u}.$$

2) Найдем три первых интеграла, решая уравнения:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1,$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = C_2,$$

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad u\cdot e^{1/x}=C_3.$$

3) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y,z)$:

$$\Phi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{1}{x}-\frac{1}{z},u\cdot e^{1/x}\right)=0,$$

разрешая которое относительно u, получим:

$$\boxed{u(x,y,z)=e^{-1/x}F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)}$$

№ 15 (4). $u_x+2u_y+u_z=xyz.$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$dx=\frac{dy}{2}=dz=\frac{du}{xyz}.$$

2) Найдем три первых интеграла, решая уравнения:

$$dx=\frac{dy}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x-y=C_1,$$

$$dx=dz \quad \Rightarrow \quad x-z=C_2.$$

3) Из уравнения $dx=\dfrac{du}{xyz}$ исключим переменные y z, используя два первых интеграла в п. 2. Получим

$$dx=\frac{du}{x(2x-C_1)(x-C_2)} \quad \Rightarrow \quad x(2x-C_1)(x-C_2)dx=du.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$u-\frac{x^4}{2}+(2C_2+C_1)\frac{x^3}{3}-C_1C_2\frac{x^2}{2}=C_3.$$

Из последнего равенства, исключив C_1 и C_2, найдем еще один первый интеграл:

$$u-\varphi(x,y,z)=C_3,$$

где $\phi(x,y,z)=\dfrac{x^4}{2}-(4x-y-2z)\dfrac{x^3}{3}+(x-z)(2x-y)\dfrac{x^2}{2}.$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y,z)$:

$$\Phi(x-z, y-2z, u-\varphi(x,y,z)) = 0,$$

разрешая которое относительно u, получим:

$$\boxed{u(x,y,z) = F\left(x-z.y-2z\right)+\varphi(x,y,z).}$$

Дополнение к № 13(1). Построить общее решение уравнения:

$$v_\xi + v_\eta = e^\xi \operatorname{sh}\eta.$$

Применить метод решения квазилинейных уравнений:

1) построить два независимых первых интеграла для характеристической системы:

$$\begin{cases} d\xi = d\eta, \\ d\eta = \frac{dv}{e^\xi \operatorname{sh}\eta}. \end{cases}$$

Первые интегралы: $\xi - \eta = C_1,\qquad \dfrac{e^{\xi-\eta}\left(e^{2\eta}-2\eta\right)}{4} - v = C_2.$

2) составить уравнение для нахождения v:

$$\Phi(\xi-\eta, \frac{e^{\xi-\eta}\left(e^{2\eta}-2\eta\right)}{4} - v) = 0 \qquad (*)$$

3) разрешить уравнение (*) относительно v:

$$\boxed{v(\xi,\eta) = \frac{e^{\xi-\eta}\left(e^{2\eta}-2\eta\right)}{4} - F(\xi-\eta).}$$

№ 17 (1): $xu_x + yu_y = 1, \quad u(x,1) = x.$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = du.$$

2) Решая систему, найдем два независимых первых интеграла:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y}=C_1;$$

$$\frac{dy}{y}=du \quad \Rightarrow \quad u-\ln|y|=C_2.$$

3) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, u-\ln|y|\right)=0.$$

4) Из полученного уравнения найдем: $u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+\ln|y|$

Задача Коши. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Для нахождения функции F используем условие $u(x,1)=x$:

$$u(x,1)=F(x)=x.$$

Решение задачи Коши: $\boxed{u(x,y)=\frac{x}{y}+\ln|y|.}$

№ 17 (3): $xu_x+yu_y=2xy, \quad u(x,x)=x^2.$

Задача Коши. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.
Общее решение: $u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+xy$

Для нахождения функции F используем условие $u(x,x)=x$:

$$u(x,x)=F(1)+x^2=x^2 \Rightarrow F(1)=0.$$

Решение задачи Коши: $u(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)+xy$, где F – произвольная дифференцируемая функция, для которой F (1)=0.

№ 17 (6): $x^2u_x-xyu_y=-y^2, \quad u(x,x)=1+\frac{x}{3}.$

1) Характеристическая система:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{du}{-y^2}$$

2) Первые интегралы характеристической системы:

$$xy = C_1, \quad u - \frac{y^2}{3x} = C_2.$$

3) Общее решение: $u(x, y) = \dfrac{y^2}{3x} + F(xy).$

4) Частное решение:

$$u(x, x) = \frac{x}{3} + F(x^2) = 1 + \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad F(t) = 1,$$

$$\boxed{u(x, y) = \frac{y^2}{3x} + 1.}$$

Домашнее задание

С. 65: №№ 17 (2, 5), 19.

Подготовка к самостоятельной работе (**5.10.23**) по теме: «Простейшие уравнения в частных производных. Метод характеристик».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

Самостоятельная работа № 1 (часть 2).

Варианты заданий

Срок выполнения – **31.10.23**

Разобрать самостоятельно:

№ 17 (7): $xu_x + yu_y = u - xy, \quad u(x, 2) = 1 + x^2.$

1) Характеристическая система:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u-xy}$$

2) Первые интегралы характеристической системы:

a) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, $\frac{x}{y}=C_1$.

b) Решая уравнение:

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u-xy},$$

при условии $x=yC_1$:

$\frac{du}{dy}=\frac{u}{y}-C_1y, \quad u=C_2y-C_1y^2=C_2y-xy,$

найдем еще один первый интеграл:

$\frac{u+xy}{y}=C_2.$

3) Общее решение: $u(x,y)=yF\left(\frac{x}{y}\right)-xy.$

4) Частное решение:

$u(x,2)=2F\left(\frac{x}{2}\right)-2x=1+x^2 \;\Rightarrow\; F\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{(x+1)^2}{2}, \quad F(t)=\frac{(2t+1)^2}{2}.$

$u(x,y)=y\cdot\frac{\left(2x/y+1\right)^2}{2}-xy=\frac{(2x+y)^2}{2y}-xy.$

№ 18 (1): $xu_x+yu_y+zu_z=0, \quad u(1,y,z)=y^2+z^2.$

1) Общее решение уравнения (см. № 15(1)):
$u(x,y,z)=F\left(\frac{x}{y},\frac{x}{z}\right)$

2) Выделение частного решения (решение задачи Коши):

$u(1,y,z)=F\left(\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)=y^2+z^2 \;\Rightarrow\; F(y,z)=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}.$

Следовательно,

$$u(x,y,z)=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2,\quad u(x,y,z)=\frac{y^2+z^2}{x^2}.$$

№ 18 (2): $u_x+u_y+u_z=xyz,\quad u(0,y,z)=y-z.$

1) Общее решение уравнения (см. № 15(2)):

$$u(x,y,z)=\frac{x^4}{4}-\frac{(2x-y-z)^2x^3}{3}+\frac{(x-y)(x-z)x^2}{2}+F(x-y,x-z).$$

2) Выделение частного решения (решение задачи Коши):

$u(0,y,z)=F(-y,-z)=y-z\ \Rightarrow\ F(y,z)=z-y.$

Следовательно,

$$u(x,y,z)=\frac{x^4}{4}-\frac{(2x-y-z)^2x^3}{3}+\frac{(x-y)(x-z)x^2}{2}+y-z.$$
