Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

02.12.2024

Занятие № 13

Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

Гл. 5, § 4, с. 150: № 31 (1)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Ненулевое решение краевой задачи будем искать в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

Подставив (4) в уравнение (1) и разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Равенство должно выполняться при любых $x \in (0, l)$ и $t > 0$, что возможно, если оба отношения равны некоторой константе, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -c, \quad c = const, \tag{5}$$

Откуда получаем два дифференциальных уравнения с параметром c:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$T''(t) + ca^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \tag{7}$$

Подставляя (4) в граничные условия (2):

$$X'(0)T(t) = X'(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$

и, учитывая, что $T(t)$ не может быть тождественно равной 0, получим

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (6) и условия (8) дают соответствующую краевой задаче задачу Штурма-Лиувилля, решением которой будут собственные числа и соответствующие им собственные функции (см. Занятие № 12):

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 0,1,2,....$$

Остается для каждого значения параметра $c = c_k$ найти общее решение уравнения (7). Оно имеет следующий вид:

$$T_k(t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t, & k = 0, \\ A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}, & k \neq 0, \end{cases} \qquad (9)$$

где A_k и B_k – произвольные $const$.

Согласно методу Фурье, решение заданного уравнения (1) запишем в виде ряда $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$:

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}. \qquad (10)$$

Неизвестные константы A_k и B_k найдем, подчинив ряд (10) начальным условиям (3):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} = x, \\ u_t(x,0) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} = 1. \end{aligned} \qquad (11)$$

Коэффициенты A_k и B_k являются коэффициентами разложений функций x и 1 соответственно в ряды по собственным функциям задачи Ш-Л:

$$A_0 = \tfrac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \tfrac{l}{2}, \quad A_k = \tfrac{2}{l}\int_0^l x\cos\tfrac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{4l}{(k\pi)^2}, & k = 2n-1, \end{cases}$$

$$n = 1,2,...., \quad B_0 = 1, \quad B_k = 0, \quad k = 1,2,....$$

Таким образом, решением задачи (1) – (3) является функция:

$$u(x,t) = \tfrac{l}{2} + t + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{((-1)^k - 1)}{k^2}\cos\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Выражение для $u(x,t)$ может быть записано и в следующем виде:

$$u(x,t)=\tfrac{l}{2}+t+\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{a(2n-1)\pi t}{l}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

Домашнее задание

Гл. 5, § 4: № 31 (2).

09.12.2024

Занятие № 14

Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

Гл. 5, § 4, с. 152: № 38 (7)

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+Ae^{-t}\cos\tfrac{x}{2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=4\sin\tfrac{3x}{2}\cdot\sin x,\quad 0\le x\le\pi. \tag{3}$$

Будем искать решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x,t)=\sum_k T_k(t)X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x)=\cos\dfrac{(2k+1)x}{2}$ являются решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x)+cX(x)=0,\qquad 0<x<\pi,$$
$$X'(0)=X(\pi)=0,$$

и, следовательно,

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{(2k+1)x}{2} \tag{4}$$

Подставляя ряд (4) в (1) и объединяя два ряда в один, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k''(t)+\frac{a^2(2k+1)^2}{4}T_k(t)\right)\cos\frac{(2k+1)x}{2}=Ae^{-t}\cos\tfrac{x}{2}.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t)+\frac{a^2(2k+1)^2}{4}T_k(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}Ae^{-t}\cos\tfrac{x}{2}\cdot\cos\tfrac{(2k+1)x}{2}\,dx=\begin{cases}Ae^{-t}, & k=0,\\ 0 & k\neq 0.\end{cases}$$

Подставляя ряд (4) в начальные условия (3), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cos\frac{(2k+1)x}{2}=0 \;\Rightarrow\; T_k(0)=0\;\;\forall k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}T_k'(0)\cos\frac{(2k+1)x}{2}=4\sin\tfrac{3x}{2}\cdot\sin x=2(\cos\tfrac{x}{2}-\cos\tfrac{5x}{2})\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T_k'(0)=\begin{cases}2, & k=0,\\ -2, & k=2,\\ 0 & k\neq 0,2.\end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

1) $\begin{cases}T_0''(t)+\frac{a^2}{4}T_0(t)=Ae^{-t}, & t>0,\\ T_0(0)=0,\;\; T_0'(0)=2.\end{cases}$

2) $\begin{cases}T_2''(t)+\frac{25a^2}{4}T_2(t)=0, & t>0,\\ T_2(0)=0,\;\; T_2'(0)=-2.\end{cases}$

3) $\forall\, k\neq 0,\,2$:

$\begin{cases}T_k''(t)+\frac{a^2(2k+1)^2}{4}T_k(t)=0, & t>0,\\ T_k(0)=0,\;\; T_k'(0)=0.\end{cases}$

Решив задачи Коши, найдем:

1) $T_0(t)=\frac{4A}{a^2+4}\left(e^{-t}-\cos\frac{at}{2}+\frac{2}{a}\sin\frac{at}{2}\right)+\frac{4}{a}\sin\frac{at}{2}$,

2) $T_2(t)=-\frac{4}{5a}\sin\frac{5at}{2}$,

3) $T_k(t)=0,\;\forall k\neq 0,2.$

Подставляя найденные выражения для $T_k(t)$ в (4), получим решение краевой задачи (1)–(3):

$$\boxed{u(x,t)=\frac{4A}{a^2+4}\left(e^{-t}-\cos\frac{at}{2}+\frac{2}{a}\sin\frac{at}{2}\right)\cos\frac{x}{2}+\frac{4}{a}\sin\frac{at}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{4}{5a}\sin\frac{5at}{2}\cos\frac{5x}{2}.}$$

Гл. 5, § 4, с. 153: № 41 (8)

$$u_{tt}+2u_t=u_{xx}+4x+8e^t\cos x,\quad 0<x<\tfrac{\pi}{2},\quad t>0, \tag{1}$$

$$u_x(0,t)=2t,\quad u(\tfrac{\pi}{2},t)=\pi t,\quad t\ge 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\cos x,\quad u_t(x,0)=2x,\quad 0\le x\le \tfrac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$u(x,t)=2xt+w(x,t),$$

где $w(x, t)$ является решением следующей краевой задачи

$$\begin{aligned}&w_{tt}+2w_t=w_{xx}+8e^t\cos x,\quad 0<x<\tfrac{\pi}{2},\quad t>0,\\ &w_x(0,t)=w\left(\tfrac{\pi}{2},t\right)=0,\quad t\ge 0,\\ &w(x,0)=\cos x,\quad w_t(x,0)=0\quad 0\le x\le \pi.\end{aligned} \tag{4}$$

Решение задачи (4) ищется в виде:

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos(2k+1)x. \tag{5}$$

После подстановки ряда (5) в уравнение и начальные условия задачи (4) получим следующие задачи Коши:

1) $$\begin{cases}T_0''(t)+2T_0'(t)+T_0(t)=8e^t,\quad t>0,\\ T_0(0)=1,\quad T_0'(0)=0,\end{cases}$$

2) $\forall\, k\ne 0$:

$$\begin{cases}T_k''(t)+2T_k'(t)+(2k+1)^2T_k(t)=0,\quad t>0,\\ T_k(0)=T_k'(0)=0.\end{cases}$$

Найдя их решения, получим

$$w(x,t)=\left(2e^t-e^{-t}-3te^{-t}\right)\cos x.$$

и

$$\boxed{u(x,t) = 2xt + \left(2e^{t} - e^{-t} - 3te^{-t}\right)\cos x.}$$

Домашнее задание

С. 152, № 39.

Подготовка к зачетной работе (***23 декабря***)

Решить примерный вариант зачетного задания:

ЗАЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ УЧП

Примерный вариант

1. Найдите решение $u = u(x, y)$ следующей краевой задачи:

$$u_x - 2x\, u_y = 0, \quad u(1, y) = y^2.$$

2. Определите тип уравнения:

$$u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} - 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u - x = 0.$$

3. Найдите общее решение $u = u(x, y)$ уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 5u_x - 25u_y = 0.$$

4. Приведите уравнение к каноническому виду:

$$u_{xx} - 2\cos x\, u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$$

5. В области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ решите задачу Коши:

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + 4u_x - 3u = 0,$$

$$u(x, 0) = e^{2x}\sin x, \quad u_t(x, 0) = e^{2x}(\cos x - \sin x).$$