Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

11.11.2024

Занятие № 10

Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad |x| < +\infty. \tag{2}$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{3}$$

Гл. 5, § 2, с. 123: № 13 (3)

$$u_{xx} - u_{tt} + 5u_x + 3u_t + 4u = 0, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = xe^{-\frac{5}{2}x - x^2}, \quad u_t(x,0) = e^{-\frac{5}{2}x}, \quad |x| < +\infty. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t.

Так как

$$\begin{array}{r|l}
4 & u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t), \\
5 & u_x = e^{\alpha x + \beta t}(\alpha v + v_x), \\
3 & u_t = e^{\alpha x + \beta t}(\beta v + v_t), \\
1 & u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}),
\end{array}$$

$$-1 \quad \Big| \quad u_{tt} = e^{\alpha x+\beta t}(\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}),$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{r|l}
v & e^{\alpha x+\beta t}(4+5\alpha+3\beta+\alpha^2-\beta^2) \\
v_x & e^{\alpha x+\beta t}(5+2\alpha) \\
v_t & e^{\alpha x+\beta t}(3-2\beta) \\
v_{xx} & e^{\alpha x+\beta t} \\
v_{tt} & -e^{\alpha x+\beta t}
\end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 5+2\alpha=0, \\ 3-2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-5/2, \\ \beta=3/2, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} = v_{xx}. \qquad (6)$$

А

$$u(x,t) = e^{(-5x+3t)/2} v(x,t), \qquad (7)$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$v(x,0) = xe^{-x^2}, \quad v_t(x,0) = e^{5x/2}\left(u_t(x,0) - \frac{3}{2}u(x,0)\right) = 1 - \frac{3}{2}xe^{-x^2}. \quad (8)$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера (при этом $a=1$):

$$v(x,t) = \frac{(x-t)e^{-(x-t)^2} + (x+t)e^{-(x+t)^2}}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(1 - \tfrac{3}{2}\xi e^{-\xi^2}\right)d\xi.$$

Вычислив интеграл, после упрощения выражения получим:

$$v(x,t) = t + e^{-x^2-t^2}\left(x \operatorname{ch} 2xt - \left(t + \frac{3}{4}\right)\operatorname{sh} 2xt\right)$$

Подставив полученное выражение для $v(x,t)$ в (7), найдем решение задачи (4)-(5).

Гл. 5, § 2, с. 123: № 15

Иллюстративный материал на сайте дисциплины

Гл. 5, § 2, с. 124: № 18 (а)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($\varphi(x) \equiv 0,\ \ \psi(x) \equiv 0$):
Если функция $f(x,t)$ – нечетные относительно x, то $u(0,t)=0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

$$u(0,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = 0,$$

так как интеграл $\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi$ рассматривается на симметричном промежутке с подынтегральной функцией, которая является нечетной при любом фиксированном τ, и, следовательно, он равен 0.

Домашнее задание

С. 123-124: № 13(7), 18(б).
С.117: Разобрать пример 1.

18.11.2024

Занятие № 11

Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Формула Даламбера

Гл. 5, § 2, с. 124: № 17 (в)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x,t) \equiv 0$):
Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$-периодические функции, то $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

1) $$u(0,t)=\frac{\varphi(-at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=$$

$$=\frac{-\varphi(at)+\varphi(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=0.$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

2) $$u(l,t)=\frac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

2) $$u(l,t)=\frac{\varphi(l-at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

По свойствам нечетности и 2l-периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at)=-\varphi(-l+at)=-\varphi(-l+at+2l)=-\varphi(l+at).$$

Разбив интеграл на два:

$$\int\limits_{l-at}^{l+at}\psi(\xi)d\xi=\int\limits_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и 2l-периодичности функции ψ:

$$\int\limits_{l-at}^{l}\psi(\xi)d\xi=\left[\xi=-\eta\right]=-\int\limits_{-l+at}^{-l}\psi(-\eta)d\xi=\int\limits_{-l+at}^{-l}\psi(\eta)d\eta=\int\limits_{-l+at}^{-l}\psi(\eta+2l)d\eta=$$

$$=\left[\xi=\eta+2l\right]=\int\limits_{l+at}^{l}\psi(\xi)d\xi=-\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi.$$

Таим образом, получаем:

$$u(l,t)=\frac{-\varphi(l+at)+\varphi(l+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(-\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi+\int\limits_{l}^{l+at}\psi(\xi)d\xi\right)=0.$$