Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

23.09.2024

Занятие № 4

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Общая схема преобразования уравнения

$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x.u_y)$		
Тип уравнения		
$B^2-AC>0$	$B^2-AC=0$	$B^2-AC<0$
гиперболический	параболический	эллиптический
Уравнение характеристик		
$A(dy)^2-2Bdydx+C(dx)^2=0$		
Первые интегралы уравнения характеристик (семейства характеристик)		
$\varphi(x,y)=C_1,$ $\psi(x,y)=C_2$	$\varphi(x,y)=C$	$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=C_1,$ $\varphi(x,y)-i\psi(x,y)=C_2$
Замена		
$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$	$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases}\quad J\neq 0$	$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$

$$u(x,y)=v(\xi,\eta),$$

$$u_x=v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x,\qquad u_y=v_\xi\xi_y+v_\eta\eta_y,$$

$$u_{xx}=v_{\xi\xi}\left(\xi_x\right)^2+2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+v_{\eta\eta}\left(\eta_x\right)^2+v_\xi\xi_{xx}+v_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{yy}=v_{\xi\xi}\left(\xi_y\right)^2+2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+v_{\eta\eta}\left(\eta_y\right)^2+v_\xi\xi_{yy}+v_\eta\eta_{yy},$$

$$u_{xy}=v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+v_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+v_\xi\xi_{xy}+v_\eta\eta_{xy}$$

Канонический вид		
$v_{\xi\eta} = \Phi$	$v_{\eta\eta} = \Phi$	$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Phi$
где $\Phi = \Phi(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$		

Гл. 2, § 5, с. 75: № 33 (1)

№ 33 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$$

Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости.

1) Определение типа уравнения:

$d = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип в любой точке плоскости.

2) Решение уравнения характеристик:

$$-2dydx - 4(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow dx(dy + 2dx) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx = 0, \\ dy + 2dx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = C_1, \\ y + 2x = C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x, \quad \eta = y + 2x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(x, y + 2x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 1 & u_x = v_\xi + 2v_\eta \\ -2 & u_y = v_\eta \\ -4 & u_{yy} = v_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения. Подстановка построенных выражений в заданное уравнение дает:

$$\boxed{2v_{\xi\eta} + v_\xi + v + \xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\xi\eta} + \tfrac{1}{2} v_\xi + \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{2} \xi = 0.}$$

Домашнее задание
Гл. 2, §5 с. 68-75: разбор примеров.
с. 75, № 33(3).

30.09.2024

Занятие № 5

Самостоятельная работа N 1
«Простейшие уравнения в частных производных».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y$,

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x$.

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Гл. 2, § 5, с. 76: № 34 (1), 35 (1)

№ 34 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} + (2 - \cos^2 x) \cdot u_{yy} = 0.$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких x и y, при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).

2) Определение типа уравнения:

   $d = \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = -1 \;\Rightarrow$ уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.

3) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2+2\sin x\cdot dydx+(2-\cos^2 x)(dx)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy+\sin x\cdot dx)^2+(dx)^2=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy+\sin xdx+idx)(dy+\sin xdx-idx)=0.$$

Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y-\cos x+ix=C_1,\quad y-\cos x-ix=C_2.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi=y-\cos x,\quad \eta=x,\quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$
$$u(x,y)=v(y-\cos x,x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

0	$u_x=\sin x\cdot v_\xi+v_\eta$
0	$u_y=v_\xi$
1	$u_{xx}=\sin^2 x\cdot v_{\xi\xi}+2\sin x\cdot v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}+\cos x\cdot v_\xi$
$2-\cos^2 x$	$u_{yy}=v_{\xi\xi}$
$-2\sin x$	$u_{xy}=\sin x\cdot v_{\xi\xi}+v_{\xi\eta}$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x+2-\cos^2 x-2\sin^2 x=1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2\sin x-2\sin x=0$	
v_ξ	$\cos x$	$\cos\eta$
v_η	0	

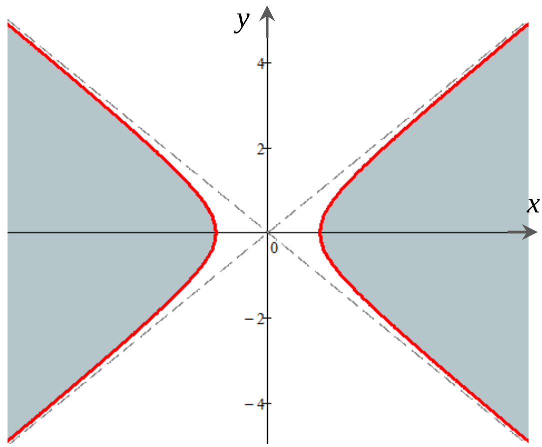
Канонический вид: $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\cos\eta\cdot v_\xi=0.$

№ 35 (1). Области параболичности, гиперболичности и эллиптичности уравнения: $(1-x^2)u_{xx}-2xyu_{xy}-(1+y^2)u_{yy}-2xu_x-2yu_y=0.$

Дискриминант уравнения:

$$d=(xy)^2+(1-x^2)(1+y^2)=1-x^2+y^2.$$

Области, где сохранятся тип уравнения, описывают условия:

<table>
<tr><td>Область параболичности</td><td>Область гиперболичности</td><td>Область эллиптичности</td></tr>
<tr><td>$1-x^2+y^2=0$</td><td>$1-x^2+y^2>0$</td><td>$1-x^2+y^2<0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Уравнение $1-x^2+y^2=0$ на координатной плоскости Oxy определяет гиперболу, которая является границей областей

</td></tr>
<tr><td></td><td>Между ветвями гиперболы</td><td></td></tr>
</table>

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: № 34 (2), 35 (3,4).

07.10.2024

Занятие № 6

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения.

№ 36 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$xu_{xx}+2xu_{xy}+(x-1)u_{yy}=0.$$

Определение типа уравнения:

$$d=x^2-x\cdot(x-1)=x$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$

Область параболичности

При $x = 0$ уравнение принимает вид: $u_{yy} = 0$ (канонический)

Уравнение характеристик:

$$x(dy)^2 - 2xdxdy + (x-1)(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow x(dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$$

$x > 0$	$x < 0$
$\left(\sqrt{x}\right)^2 (dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$	$\left(\sqrt{-x}\right)^2 (dy-dx)^2 + (dx)^2 = 0.$

Область гиперболичности

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 (dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0, \\ dy - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0 \end{array}\right.$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2\sqrt{x} = c_1,$$
$$y - x - 2\sqrt{x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \\ \eta = y - x - 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$u(x,y) = v(y - x + 2\sqrt{x}, y - x - 2\sqrt{x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{c|l} 0 & u_x = v_\xi\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_\eta\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ 0 & u_y = v_\xi + v_\eta \\ x & u_{xx} = v_{\xi\xi}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2v_{\xi\eta}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \\ & \qquad + v_{\eta\eta}\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - v_\xi \frac{1}{2x\sqrt{x}} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{x}} \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
2x & u_{xy} = v_{\xi\xi}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\xi\eta}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + v_{\eta\eta}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)
\end{array}
$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x\cdot\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x-1+2x\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$	
$v_{\eta\eta}$	$x\cdot\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x-1+2x\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$	
$v_{\xi\eta}$	$2x\left(1-\frac{1}{x}\right)+2(x-1)-4x=-4$	
v_{ξ}	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{\xi-\eta}$
v_{η}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{\xi-\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(v_{\xi} - v_{\eta}) = 0.$

Область эллиптичности

$$
\left(\sqrt{-x}\right)^2(dy-dx)^2 + (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy-\left(1+\frac{i}{\sqrt{-x}}\right)dx=0, \\ dy-\left(1-\frac{i}{\sqrt{-x}}\right)dx=0 \end{array}\right.
$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2i\sqrt{-x} = c_1,$$
$$y - x - 2i\sqrt{-x} = c_2$$

Замена

$$
\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x} \end{cases}
$$

$$u(x,y) = v(y-x, 2\sqrt{-x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

$$
\begin{array}{r|l}
0 & u_x = -v_{\xi} - v_{\eta}\frac{1}{\sqrt{-x}} \\
0 & u_y = v_{\xi}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta}\dfrac{1}{\sqrt{-x}} - v_{\eta\eta}\dfrac{1}{x} + v_{\eta}\dfrac{1}{2x\sqrt{-x}} \\
x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
2x & u_{xy} = -v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta}\dfrac{1}{\sqrt{-x}}
\end{array}
$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x + x - 1 - 2x = -1$	
$v_{\eta\eta}$	-1	
$v_{\xi\eta}$	$2x\frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x\frac{1}{\sqrt{-x}} = 0$	
v_{ξ}	0	
v_{η}	$\frac{1}{2\sqrt{-x}}$	$\frac{1}{\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}v_{\eta} = 0.$

Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$
xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y - x(y + x^2) = 0. \qquad (1)
$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости за исключением точек прямой $x = 0$.

2) Определение типа уравнения:

   $d = 4x^4 - 4x^4 = 0 \;\Rightarrow$ уравнение имеет параболический тип.

3) Решение уравнения характеристик:

$$
x(dy)^2 + 4x^2dydx + 4x^3(dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (dy + 2xdx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow
$$
$$
\Leftrightarrow\; dy + 2xdx = 0 \;\Rightarrow\; y + x^2 = C.
$$

4) Переход к новым переменным:

$$
\xi = y + x^2, \quad \eta = x, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta).
$$
$$
u(x,y) = v(y + x^2, x).
$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
1 & u_x = 2xv_\xi + v_\eta \\
-4x & u_y = v_\xi \\
x & u_{xx} = 4x^2 v_{\xi\xi} + 4xv_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + 2v_\xi \\
4x^3 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
-4x^2 & u_{xy} = 2xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}
\end{array}$$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η	Свободное слагаемое
0	x	0	0	1	$-x\,(y+x^2)$
	η			1	$-\xi\eta$
	$\eta \neq 0$				

Канонический вид:

$$\eta v_{\eta\eta} + v_\eta = \xi\eta \qquad (2)$$

Замечание. Так как переменная η может быть задана любым выражением, при котором преобразование независимых переменных будет невырожденным, то и канонический вид может быть другим. Так, если новые переменные ввести следующим образом:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = y, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta),$$

то канонический вид для уравнения (1) будет следующим:

$$(\xi - \eta)v_{\eta\eta} - v_\eta = \frac{\xi}{4}.$$

7) Построение общего решения уравнения (2):

$$\eta v_{\eta\eta} + v_\eta = \xi\eta \quad \Leftrightarrow \quad (\eta v_\eta)'_\eta = \xi\eta,$$

$$\eta v_\eta = \frac{\xi\eta^2}{2} + C(\xi), \qquad v_\eta = \frac{\xi\eta}{2} + \frac{C(\xi)}{\eta},$$

$$v(\xi,\eta)=\frac{\xi\eta^2}{4}+C(\xi)\ln|\eta|+\Phi(\xi).$$

8) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$\boxed{u(x,y)=\frac{x^2(y+x^2)}{4}+C\left(y+x^2\right)\ln|x|+\Phi\left(y+x^2\right)} \qquad (3)$$

С. 86, № 40 (1).

$$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0)=3x^2, \quad u_y(x,0)=0.$

1) Определение типа уравнения:

$d=1+3=4>0 \quad \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2-2dydx-3(dx)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (dy-dx)^2-4(dx)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} dy-3dx=0, \\ dy+dx=0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-3x=C_1, \\ y+x=C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=y-3x, \quad \eta=y+x, \quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y)=v(y-3x,y+x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x=-3v_\xi+v_\eta \\
0 & u_y=v_\xi+v_\eta \\
1 & u_{xx}=9v_{\xi\xi}-6v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \\
-3 & u_{yy}=v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \\
2 & u_{xy}=-3v_{\xi\xi}-2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}
\end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_{ξ}	v_{η}
0	0	–16	0	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0. \qquad (2)$$

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: № **36 (4)**; с. 86: № **40 (2)** (привести уравнение к каноническому виду).

14.10.2024

Занятие № 7

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши

С. 86, № 40 (1). Продолжение

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad v_{\xi} = C(\xi), \qquad v(\xi,\eta) = \int C(\xi)d\xi + F(\eta) = \Phi(\xi) + \mathrm{F}(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = \Phi(y-3x) + F(y+x). \qquad (3)$$

8) *Построение частного решения*

Найдем производную:

$$u_y(x,y) = \Phi'(y-3x) + F'(y+x).$$

Подставляя (3) в заданные условия $u(x,0) = 3x^2$, $u_y(x,0) = 0$, получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(x,0) = \Phi(-3x) + F(x) = 3x^2, \\ u_y(x,0) = \Phi'(-3x) + F'(x) = 0. \end{cases}$$

Решение системы (методом подстановки)

$$\begin{cases} F(x) = 3x^2 - \Phi(-3x), \\ \Phi'(-3x) + 6x + 3\Phi'(-3x) = 0 \end{cases}$$

$$\Phi'(-3x) = -\frac{3x}{2}, \quad \Phi'(t) = \frac{t}{2}, \quad \Phi(t) = \frac{t^2}{4} + C, \; C - const.$$

Подставляя полученное выражение для Φ в первое уравнение системы, найдем

$$F(x) = 3x^2 - \frac{9x^2}{4} - C = \frac{3x^2}{4} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{(y-3x)^2}{4} + \frac{3(y+x)^2}{4} = y^2 + 3x^2.}$$

№ 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y - 4)u_{xx} - 2\sin y \cdot u_{xy} + u_{yy} - \cos y \cdot u_x = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям: $u(\cos y, y) = \cos y, \;\; u_x(\cos y, y) = \sin y.$

1) Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 y - (\sin^2 y - 4) = 4 > 0 \;\; \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(\sin^2 y - 4)(dy)^2 + 2\sin y dy dx + (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dx + \sin y dy)^2 - 4(dy)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx + (\sin y - 2)dy = 0, \\ dx + (\sin y + 2)dy = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \cos y - 2y = C_1, \\ x - \cos y + 2y = C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = x - \cos y - 2y, \quad \eta = x - \cos y + 2y, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y) = v(x - \cos y - 2y, x - \cos y + 2y).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$
\begin{array}{r|l}
-\cos y & u_x = v_\xi + v_\eta \\
0 & u_y = (\sin y - 2)v_\xi + (\sin y + 2)v_\eta \\
(\sin^2 y - 4) & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
1 & u_{yy} = (\sin y - 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 y - 4)v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)^2 v_{\eta\eta} + \\
 & \qquad + \cos y \cdot v_\xi + \cos y \cdot v_\eta \\
-2\sin y & u_{xy} = (\sin y - 2)v_{\xi\xi} + 2\sin y \cdot v_{\xi\eta} + (\sin y + 2)v_{\eta\eta}
\end{array}
$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y - 2)^2 - 2\sin y(\sin y - 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y - 4 + (\sin y + 2)^2 - 2\sin y(\sin y + 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y - 4) + 2(\sin^2 y - 4) - 4\sin^2 y = -16$
v_ξ	$-\cos y + \cos y = 0$
v_η	$-\cos y + \cos y = 0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta). \tag{2}$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = \Phi(x - \cos y - 2y) + \Psi(x - \cos y + 2y). \tag{3}$$

8) *Построение частного решения*

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y\,,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(\cos y, y) = \Phi(-2y) + F(2y) = \cos y, \\ u_x(\cos y, y) = \Phi'(-2y) + F'(2y) = \sin y. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y) + 2F'(2y) = -\sin y \quad \Rightarrow \quad \Phi'(-2y) = \tfrac{1}{2}\sin y + F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\tfrac{1}{2}\sin y + F'(2y) + F'(2y) = \sin y \;\Rightarrow\; F'(2y) = \tfrac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t) = \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{t}{2}, \quad F(t) = -\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2} + C, \quad C - const.$$

Найденное выражение для функции F подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y) - \tfrac{1}{2}\cos y + C = \cos y \;\Rightarrow\; \Phi(-2y) = \tfrac{3}{2}\cos y - C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t) = \tfrac{3}{2}\cos\tfrac{t}{2} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x, y) = \tfrac{3}{2}\cos\frac{x-\cos y-2y}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\frac{x-\cos y+2y}{2}.}$$

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 86: № 40 (2, 5а).

Примерный вариант контрольной работы (**28 октября**).

21.10.2024

Занятие № 8

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

Разбор примерного варианта контрольной работы

1. Укажите области на плоскости XOY, где сохраняется тип уравнения:

$$y\, u_{xx} - x(\cos \pi x + 1)u_{yy} + x\, u_x - u = 0$$

2. Решите задачу Коши:

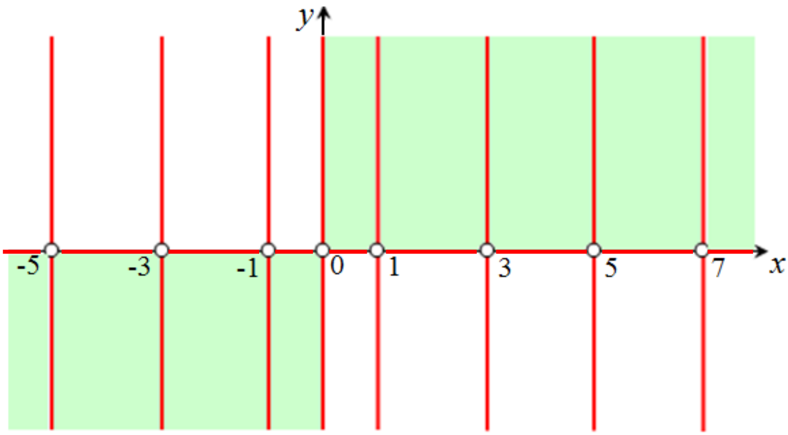
$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - (4 - \sin^2 x)u_{yy} + 8u_x - (16 + 8\sin x + \cos x)u_y = 0,$$

$$u(x, \cos x) = e^{-6x} + 2x, \qquad u_y(x, \cos x) = 1 - e^{-6x}.$$

Задание 1. Область, в которой уравнение не является уравнением второго порядка, определяется условиями:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ \cos \pi x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \{(0,0), (2k+1, 0),\ k \in Z\}$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$xy(\cos \pi x + 1) = 0$	$xy(\cos \pi x + 1) > 0$	$xy(\cos \pi x + 1) < 0$
$\left[\begin{array}{l} x = 0, \quad y \neq 0 \\ y = 0, \quad x \neq 1 + 2k, \ k \in Z, \\ x = 1 + 2k, \quad k \in Z, \ y \neq 0 \end{array}\right.$	$\begin{cases} xy > 0, \\ x \neq 1 + 2k, \ k \in Z \end{cases}$	$\begin{cases} xy < 0, \\ x \neq 1 + 2k, \ k \in Z \end{cases}$



Задание 2

1. Определение типа уравнения:

   $d = \sin^2 x + 4 - \sin^2 x = 4 > 0 \;\Rightarrow\;$ уравнение имеет гиперболический тип.

2. Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2\sin x dydx - (4 - \sin^2 x)(dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dy + \sin x dx)^2 - 4(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy + (\sin x + 2)dx = 0, \\ dy + (\sin x - 2)dx = 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - \cos x + 2x = C_1, \\ y - \cos x - 2x = C_2. \end{array}\right.$$

3. Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x + 2x, \quad \eta = y - \cos x - 2x, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y) = v(y - \cos x + 2x, y - \cos x - 2x).$$

4. Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 8 & u_x = v_\xi(\sin x + 2) + v_\eta(\sin x - 2) \\ \begin{array}{r} -16 - 8\sin x - \\ -\cos x \end{array} & u_y = v_\xi + v_\eta \end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & u_{xx} = (\sin x + 2)^2 v_{\xi\xi} + 2(\sin^2 x - 4) v_{\xi\eta} + (\sin x - 2)^2 v_{\eta\eta} + \\
 & \quad + \cos x \cdot v_{\xi} + \cos x \cdot v_{\eta} \\
(\sin^2 x - 4) & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
-2\sin x & u_{xy} = (\sin x + 2) v_{\xi\xi} + 2\sin x \cdot v_{\xi\eta} + (\sin x - 2) v_{\eta\eta}
\end{array}
$$

5. Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x - 4 + (\sin x + 2)^2 - 2\sin x(\sin x + 2) = 0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 x - 4 + (\sin x - 2)^2 - 2\sin x(\sin x - 2) = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 x - 4) + 2(\sin^2 x - 4) - 4\sin^2 x = -16$
v_{ξ}	$8\sin x + 16 - 16 - 8\sin x = 0$
v_{η}	$8\sin x - 16 - 16 - 8\sin x = -32$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} + 2v_{\eta} = 0$$

6. Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi,\eta) = e^{-2\xi}\Phi(\eta) + F(\xi). \tag{2}$$

7. Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x,y) = e^{-2(y - \cos x + 2x)}\Phi(y - \cos x - 2x) + F(y - \cos x + 2x). \tag{3}$$

8. Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(x,\cos x) = e^{-6x} + 2x, \quad u_y(x,\cos x) = 1 - e^{-6x},,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} e^{-4x}\Phi(-2x) + F(2x) = e^{-6x} + 2x, \\ e^{-4x}\Phi'(-2x) - 2e^{-4x}\Phi(-2x) + F'(2x) = 1 - e^{-6x}. \end{cases}$$

Выполнив в системе замену $t = 2x$, будем иметь

$$\begin{cases} e^{-2t}\Phi(-t) + F(t) = e^{-3t} + t, \\ e^{-2t}\Phi'(-t) - 2e^{-2t}\Phi(-t) + F'(t) = 1 - e^{-3t}. \end{cases} \tag{4}$$

9. *Решение системы (методом подстановки)*

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$e^{-2t}(-2\Phi(-t)-\Phi'(-t))+F'(t)=-3e^{-3t}+1 \;\Rightarrow$$
$$F'(t)=-3e^{-3t}+1+e^{-2t}(2\Phi(-t)+\Phi'(-t)).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$e^{-2t}\Phi'(-t)-2e^{-2t}\Phi(-t)-3e^{-3t}+1+e^{-2t}(2\Phi(-t)+\Phi'(-t))=1-e^{-3t},$$

$$\Phi'(-t)=e^{-t}, \quad \Phi(t)=e^{t}+C, \quad C-const.$$

$F(t)$ найдем из первого уравнения системы (4):

$$F(t)=e^{-3t}+t-e^{-2t}\left(e^{-t}+C\right)=t-Ce^{-2t}.$$

10. Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y)=y-\cos x+2x+e^{-y+\cos x-6x}}$$

№ 44. Найти решение уравнения

$$u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0, \quad y<0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x), \quad u_y(x,0)-\textit{конечная величина}.$$

---

1. Определение типа уравнения. Так как в области $(y<0)$ дискриминант уравнения $d=-y>0$, то уравнение имеет в точках этой области гиперболический тип.

2. Определение семейства характеристик.

$$(dy)^2+y(dx)^2=0 \;\Leftrightarrow\; (dy)^2-(\sqrt{-y}dx)^2=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy-\sqrt{-y}dx=0, \\ dy+\sqrt{-y}dx=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{-\sqrt{-y}}+dx=0, \\ \dfrac{dy}{-\sqrt{-y}}-dx=0. \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x+2\sqrt{-y}=C_1, \\ x-2\sqrt{-y}=C_2. \end{array}\right.$$

3. Приведение уравнения к каноническому виду.

Замена

$$\begin{cases} \xi = x + 2\sqrt{-y}, \\ \eta = x - 2\sqrt{-y}, \end{cases}$$

$$u(x,y) = v(x + 2\sqrt{-y}, x - 2\sqrt{-y})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

0	$u_x = v_\xi + v_\eta$
1/2	$u_y = \dfrac{1}{-\sqrt{-y}} v_\xi + \dfrac{1}{\sqrt{-y}} v_\eta$
1	$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$
y	$u_{yy} = \dfrac{1}{-y} v_{\xi\xi} + \dfrac{2}{y} v_{\xi\eta} + \dfrac{1}{-y} v_{\eta\eta} + \dfrac{2}{y\sqrt{-y}} v_\xi - \dfrac{2}{y\sqrt{-y}} v_\eta$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$1 + y \cdot \dfrac{1}{-y} = 0$
$v_{\eta\eta}$	$1 + y \cdot \dfrac{1}{-y} = 0$
$v_{\xi\eta}$	$2 + 2 = 4$
v_ξ	$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{-\sqrt{-y}} + y \cdot \dfrac{2}{y\sqrt{-y}} = 0$
v_η	$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{-y}} + y \cdot \left(-\dfrac{2}{y\sqrt{-y}}\right) = 0$

Канонический вид: $v_{\xi\eta} = 0.$

4. Общее решение уравнения: $v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + F(\eta).$

5. Возвращаясь к старым переменным *x*, *y*, *u*, получим общее решение заданного уравнения:
$$u(x,y)=\Phi(x+2\sqrt{-y})+F(x-2\sqrt{-y}). \qquad (*)$$

6. Построение частного решения.

Так как
$$u_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt{-y}}\Big(-\Phi'(x+2\sqrt{-y})+F'(x+2\sqrt{-y})\Big),$$
$$\sqrt{-y}\cdot u_y(x,y)=-\Phi'(x+2\sqrt{-y})+F'(x+2\sqrt{-y}),$$

то, учитывая заданные условия, для нахождения функций Φ и F получим следующую систему уравнений:
$$\left.\begin{aligned}
&u(x,0)=\tau(x)=\Phi(x)+F(x),\\
&\left.\left(\sqrt{-y}\cdot\underbrace{u_y(x,y)}_{\substack{\text{конеч.величина}\\ \text{при } y=0}}\right)\right|_{y=0}=0=-\Phi'(x)+F'(x)
\end{aligned}\right\}$$

Решая полученную систему, найдем:
$$F(x)=\frac{1}{2}\tau(x)+C,\quad \Phi(x)=\frac{1}{2}\tau(x)-C.$$

Подставляя найденные выражения в (*), получим решение задачи:
$$u(x,y)=\frac{\tau(x+2\sqrt{-y})+\tau(x-2\sqrt{-y})}{2}.$$

Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 87: № 43.

28.10.2024

Занятие № 9

Контрольная работа № 1. Приведение уравнения к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.