Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

12.04.2023

Занятие № 9. Первая краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Метод Фурье

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{1}$$

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(a, y) = \nu(y), \quad 0 \le y \le b, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0, \qquad 0 \le x \le a, \tag{3}$$

$$\mu(0) = \mu(b) = \nu(0) = \nu(b) = 0.$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа (1) в виде:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) - cX(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \tag{5}$$

$$Y''(y) + cY(y) = 0, \qquad 0 < y < b. \tag{6}$$

Подставив (4) в граничные условия (3), получим условия

$$Y(0) = Y(b) = 0, \tag{7}$$

которые вместе с уравнением (6) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k=\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2,\quad Y_k(y)=\sin\frac{k\pi y}{b},\quad \|Y_k(y)\|^2=\frac{b}{2},\quad k=1,2,\ldots$$

Для каждого значения параметра $c=c_k$ общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$X(x)=A_k e^{\frac{k\pi x}{b}}+B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}.$$

В результате получаем решение уравнения (1) в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (6), (7):

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)Y_k(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi x}{b}}+B_k e^{-\frac{k\pi x}{b}}\right)\sin\frac{k\pi y}{b}. \qquad (8)$$

Произвольные постоянные A_k и B_k найдем, подчинив ряд (8) граничным условиям (2):

$$u(0,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k+B_k\right)\sin\frac{k\pi y}{b}=\mu(y),$$

$$u(a,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi a}{b}}+B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}\right)\sin\frac{k\pi y}{b}=\nu(y).$$

Разложив функции $\mu(y)$ и $\nu(y)$ в ряд по собственным $Y_k(y)$, получим:

$$\begin{cases} A_k+B_k=\dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b\mu(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy\overset{]}{=}\mu_k, \\ A_k e^{\frac{k\pi a}{b}}+B_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}=\dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b\nu(y)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy\overset{]}{=}\nu_k, \end{cases} \qquad (9)$$

$$k=1,2,\ldots$$

Система (9) имеет следующее решение:

$$A_k = \frac{\nu_k - \mu_k e^{-\frac{k\pi a}{b}}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}}, \quad B_k = \frac{\mu_k e^{\frac{k\pi a}{b}} - \nu_k}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}}, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Подставив полученные выражения для A_k и B_k в ряд (8), получим

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi x}{b} + \mu_k\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi(a-x)}{b}}{\mathrm{sh}\,\frac{k\pi a}{b}} \sin\frac{k\pi y}{b}.$$

С. 154, № 48

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0,y) = A\sin\frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{1}$$

Будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы:

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y), \tag{2}$$

когда функции $v(x,y)$ и $w(x,y)$ являются соответственно решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ v(0,y) = v(a,y) = 0, & 0 \le y \le b, \\ v(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad v(x,b) = 0, & 0 \le x \le a, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ w(x,0) = w(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ w(0,y) = A\sin\dfrac{\pi y}{b}, \quad w(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b. \end{cases} \tag{4}$$

Решение краевой задачи (3) можно найти в виде ряда по собственным функциям $X_k(x)$ (граничные условия однородные для $x = 0$ и $x = a$):

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}. \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнение Лапласа и граничные условия задачи (3) при $y = 0$ и $y = b$, получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} Y_k''(y) - \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0, \quad 0 < y < b, \quad k \in N, \\ Y_k(0) = \begin{cases} B, & k = 1, \\ 0, & k \ne 1, \end{cases} \qquad Y_k(b) = 0, \ k \in N. \end{cases} \tag{6}$$

решив которые, найдем $Y_k(y)$:

$$Y_1(y) = B\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}}, \quad Y_k(y) = 0, \ \forall k \ne 1.$$

Таким образом, для задачи (3) получаем следующее решение

$$v(x,y) = B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}} \sin\frac{\pi x}{a}.$$

Сравнивая условия задач (3) и (4), нетрудно установить, что решение задачи (4) имеет вид:

$$w(x,y)=A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Ответ:

$$u(x,y)=B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}+A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

Домашнее задание

Постройте решение краевой задачи методом Фурье:

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0,\qquad 0<x<a,\quad 0<y<b,$$

$$u_x(0,y)=\mu(y),\ \ u(a,y)=\nu(y),\ \ 0\le y\le b,$$

$$u_y(x,0)=u_y(x,b)=0,\ \ 0\le x\le a.$$

19.04.2023

Занятие № 10. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод Фурье

Задача Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\begin{cases}\Delta u=0,\quad 0<x<a,\ \ 0<y<b,\\ u_x(0,y)=u_x(a,y)=0,\ \ u_y(x,0)=f(x),\ \ u_y(x,b)=g(x).\end{cases}$$

Будем искать ненулевое решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)\tag{1}$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -c = const.$$

Отсюда будем иметь:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \qquad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$Y''(y) - cY(y) = 0, \qquad 0 < y < b. \tag{3}$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$X'(0) = X'(a) = 0, \tag{4}$$

которые вместе с уравнением (2) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k = 0,1,...,$$

$$\left\|X_k(x)\right\|^2 = \begin{cases} a, & k = 0, \\ \frac{a}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Для каждого значения параметра $c = c_k$ общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_0(y) = A_0 y + B_0, \quad Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (2), (4):

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a}. \tag{8}$$

Подчиним полученный ряд (8) граничным условиям при y = 0 и y = b. Будем иметь:

$$u_y(x,0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right)\cos\frac{k\pi x}{a} = f(x),$$

$$u_y(x,b) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right)\cos\frac{k\pi x}{a} = g(x).$$

Разлагая функции $f(x)$ и $g(x)$ в ряд по собственным функциям $X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{a}$, получим условия для нахождения коэффициентов A_0, A_k, B_k. Так как для определения A_0 имеем два уравнения:

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \quad A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a g(x)dx,$$

То в случае, если не будет выполнено условие

$$\boxed{\int_0^a f(x)dx = \int_0^a g(x)dx \text{ хс},} \tag{9}$$

то рассматриваемая задача Неймана не будет иметь решения. Если условие будет выполнено, то

$$A_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \tag{10}$$

а коэффициенты A_k и B_k ($k \neq 0$) ряда (8) найдем, решая системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{k\pi}{a}\left(A_k - B_k\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \\ \frac{k\pi}{a}\left(A_k e^{\frac{k\pi b}{a}} - B_k e^{-\frac{k\pi b}{a}}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos\frac{k\pi x}{a}dx, \end{cases} \tag{11}$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Так как для каждого k определитель матрицы системы (11) отличен от 0, то система (11) имеет единственное решение.

Коэффициент B_0 ряда (8) не может быть определен однозначно, он принимает произвольные значения.

Вывод: *Задача Неймана имеет решение, ес—1*

0иіли граничные функции удовлетворяют условию (9). При этом решение может быть записано в виде ряда (8), коэффициенты которо-

го A_0, A_k, B_k $(k \neq 0)$ *определяются условиями (10), (11), а* B_0 *– произвольная постоянная.*

Краевые задачи для уравнения Лапласа в круге

с. 155, № 56 (1)

\11 000

20O0бщее решение уравнения Лапласа в круге:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n$$

С. 156, № 59 (4) (условие разрешимости задачи Неймана)

Задача Неймана для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u_r(R,\varphi) = f(\varphi), \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Условие разрешимости: $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$

Домашнее задание

С.155, № **55, 56 (7), 59 (5).**

26.04.2023

Занятие № 11. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Метод Фурье

С. 157, № 63 (Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце)

Перейдя к полярным координатам $u(x,y) \to v(r,\varphi)$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r,\varphi) = 0, \quad 2 < r < 3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ v(2,\varphi) = 2\cos\varphi, \quad v(3,\varphi) = 3\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце:

$$v(r,\varphi) =$$

$$= A_0 \ln r + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + A_{-k} r^{-k}) \cos k\varphi + (B_k r^k + B_{-k} r^{-k}) \sin k\varphi.$$

Подчинив общее решение заданным граничным условиям:

$$v(2,\varphi) = 2\cos\varphi =$$

$$= A_0 \ln 2 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k}) \sin k\varphi,$$

$$v(3,\varphi) = 3\sin\varphi =$$

$$= A_0 \ln 3 + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k}) \cos k\varphi + (B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k}) \sin k\varphi,$$

Построим системы уравнений для нахождения коэффициентов A_0, B_0, A_k, A_{-k}, B_k, B_{-k}:

1) $\begin{cases} A_0 \ln a + B_0 = 0 \\ A_0 \ln b + B_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 0, \\ B_0 = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2A_1 + A_{-1}2^{-1} = 2, \\ 3A_1 + A_{-1}3^{-1} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{4}{5}, \\ A_{-1} = \frac{36}{5}, \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2B_1 + B_{-1}2^{-1} = 0, \\ 3B_1 + B_{-1}3^{-1} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{9}{5}, \\ B_{-1} = -\frac{36}{5}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} A_k 2^k + A_{-k} 2^{-k} = 0, \\ A_k 3^k + A_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = 0, \\ A_{-k} = 0, \end{cases}$ для k=2, 3, …

5) $\begin{cases} B_k 2^k + B_{-k} 2^{-k} = 0, \\ B_k 3^k + B_{-k} 3^{-k} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_k = 0, \\ B_{-k} = 0, \end{cases}$ для k=2, 3, …

Таким образом,

$$v(r,\varphi) = \left(-\tfrac{4}{5}r + \tfrac{36}{5}\tfrac{1}{r}\right)\cos\varphi + \left(\tfrac{9}{5}r - \tfrac{36}{5}\tfrac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим

$$u(x,y) = \frac{9}{5}y - \frac{4}{5}x + \frac{36}{5}\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

Домашнее задание

1. Решить краевую задачу в кольце:

$$\begin{cases} \Delta u(r,\phi) = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \\ u_r(1,\phi) = 2\cos\phi + \sin 2\phi, \quad u(2,\phi) = 1 + 2\cos 2\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi. \end{cases}$$

2. Решить примерный вариант Контрольной работы № 2.

03.05.2023

Занятие № 12. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона. Метод Фурье

Краевая задача для уравнения Лапласа в круговом секторе

с. 155, № 52.

$$\begin{cases} \Delta u(r,\varphi)=0, \quad 0<r<a, \quad 0<\varphi<\alpha, \\ u(a,\varphi)=f(\varphi), \quad 0\le\varphi\le\alpha, \\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0, \quad 0\le r\le a. \end{cases}$$

Будем искать ненулевое ограниченное решение уравнения Лапласа в виде:

$$u(r,\varphi)=\Phi(\varphi)R(r) \qquad (1)$$

Подставляя (1) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим:

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=c=const.$$

Отсюда будем иметь:

$$r^2R''(r)+rR'(r)-cR(x)=0, \quad 0<r<a, \qquad (2)$$

$$\Phi''(\varphi)+c\Phi(\varphi)=0, \quad 0<\varphi<\alpha. \qquad (3)$$

Подставив (1) в однородные граничные условия, получим условия

$$\Phi(0)=\Phi(\alpha)=0, \qquad (4)$$

которые вместе с уравнением (3) дают задачу Штурма-Лиувилля. Она имеет следующее решение:

$$c_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2, \quad \Phi_n(\varphi)=\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad n=1,2,\ldots,$$

$$\|\Phi_n(\varphi)\|^2=\frac{\alpha}{2} \quad \forall n.$$

Для каждого значения параметра $c = c_n$ общее решение уравнения (2), удовлетворяющее условию ограниченности, имеет вид:

$$R_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}.$$

В результате получаем решение уравнения Лапласа в виде ряда по собственным функциям задачи Ш-Л (3), (4):

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\varphi) R_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}. \qquad (8)$$

Подчиним полученный ряд (8) граничному условию при $r = a$. Будем иметь:

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} = f(\varphi).$$

Найдем коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ в ряд по собственным:

$$A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} d\varphi = f_n, \quad n = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; A_n = f_n \cdot a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}.$$

Ответ: $u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} d\varphi.$

С. 156, № 58 (4)

$$\begin{cases} \Delta u = y, \quad 0 \le x^2 + y^2 < R^2, \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=R^2} = 1. \end{cases}$$

Перейдя к полярным координатам $u(x,y) \to v(r,\varphi)$, получим краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v(r,\varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = r \sin\varphi, \quad 0 < r < R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ v(R,\varphi) = 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, которые являются функциями r:

$$v(r,\varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r)\cos k\varphi + B_k(r)\sin k\varphi) \qquad (1)$$

Подстановка ряда (1) в уравнение краевой задачи дает:

$$A_0''(r) + \tfrac{1}{r} A_0'(r) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k''(r) + \tfrac{1}{r} A_k'(r) - \tfrac{k^2}{r^2} A_k(r)\Big)\cos k\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\Big(B_k''(r) + \tfrac{1}{r} B_k'(r) - \tfrac{k^2}{r^2} B_k(r)\Big)\sin k\varphi = r\cdot\sin\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin k\varphi$ и $\cos k\varphi$, получим:

$$A_0''(r) + \tfrac{1}{r} A_0'(r) = 0,$$

$$A_k''(r) + \tfrac{1}{r} A_k'(r) - \tfrac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad \forall k,$$

$$B_1''(r) + \tfrac{1}{r} B_1'(r) - \tfrac{1}{r^2} B_1(r) = r,$$

$$B_k''(r) + \tfrac{1}{r} B_k'(r) - \tfrac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad \forall k \neq 1.$$

Подстановка ряда (1) в граничное условие краевой задачи дает:

$$A_0(R) + \sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k(R)\cos k\varphi + B_k(R)\sin k\varphi\big)\cos k\varphi = 1.$$

Отсюда получаем:

$$A_0(R) = 1, \quad A_k(R) = B_k(R) = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

В результате получили следующие краевые задачи:

1) $A_0''(r) + \tfrac{1}{r} A_0'(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_0(R) = 1,$

2) $A_k''(r) + \tfrac{1}{r} A_k'(r) - \tfrac{k^2}{r^2} A_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad A_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 0,$

3) $B_1''(r) + \tfrac{1}{r} B_1'(r) - \tfrac{1}{r^2} B_1(r) = r, \quad 0 < r < R, \quad B_1(R) = 0,$

4) $B_k''(r) + \tfrac{1}{r} B_k'(r) - \tfrac{k^2}{r^2} B_k(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad B_k(R) = 0, \quad \forall k \neq 1.$

При построении решения краевых задач 1)-4) следует учитывать условие ограниченности решения при $r = 0$.

Решение задачи 1): $A_0(r) \equiv 1$.

Уравнение задачи 3) является неоднородным уравнением Эйлера[1]:

$$r^2 B_1''(r) + rB_1'(r) - B_1(r) = r^3. \qquad (2)$$

Общее решение соответствующего однородного имеет вид:

$$B_1^{одн}(r) = C_1 r + C_2 r^{-1}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$B_1^{ч}(r) = D \cdot r^3.$$

Подставляя выражение для $B_1^{ч}(r)$ в уравнение (2), найдем $D = 1/8$.

Таким образом, общим решением уравнения (2) является функция:

$$B_1(r) = C_1 r + C_2 r^{-1} + \tfrac{1}{8} r^3.$$

Из условия ограниченности решения задачи 3) имеем $C_2 = 0$. Учитывая условие $B_1(R) = 0$, найдем $C_1 = -\tfrac{1}{8} R^2$. Таким образом, получили решение задачи 3):

$$B_1(r) = -\tfrac{1}{8} R^2 r + \tfrac{1}{8} r^3.$$

Решения задачи 1)-4) подставляем в ряд (1):

$$v(r,\varphi) = 1 + \left(-\tfrac{1}{8} R^2 r + \tfrac{1}{8} r^3\right)\sin\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x,y) = 1 + \tfrac{1}{8}\left(y(x^2 + y^2) - R^2 y\right).$$

---

[1] О решении уравнения Эйлера см., например, стр. 74 в «*Дифференциальные и интегральные уравнения*: Учебное пособие . Часть 1.» (сост. М.М. Кручек, Н.Ю. Светова, Е.Е. Семенова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014) http://elibrary.karelia.ru/book.shtml?levelID=017&id=20620&cType=1

Домашнее задание

С.157, № 62.

Подготовка к контрольной работе (**17 мая 2023 г.**)

[Примерный вариант]

10.05.2023

Занятие № 13. Краевые задачи для уравнения Пуассона. Метод Фурье

С. 157, № 64

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y)\Big|_{x^2+y^2=1} = 0, \quad \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=4} = 0 \end{cases}$$

1. Переходя к полярным координатам, получим:

$$\begin{cases} \Delta v(r,\phi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\phi\phi} = r\cos 2\phi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \\ v(1,\phi) = v_r(2,\phi) = 0, \quad 0 \le \phi \le 2\pi. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Решение краевой задачи ищется в виде ряда Фурье:

$$v(r,\varphi) = A_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r)\cos k\varphi + B_k(r)\sin k\varphi) \qquad (2)$$

3. Подстановка (2) в (1) дает следующие краевые задачи:

1) $rA_0''(r) + A_0'(r) = 0, \ \ 1 < r < 2, \ \ A_0(1) = A_0'(2) = 0,$

2) $r^2 A_2''(r) + rA_2'(r) - 4A_2(r) = r^3, \quad 1 < r < 2, \quad A_2(1) = A_2'(2) = 0,$

3)

$$r^2 A_k''(r) + rA_k'(r) - k^2 A_k(r) = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$A_k(1) = A_k'(2) = 0, \quad \forall k \neq 0, 2,$$

4)

$$r^2 B_k''(r) + rB_k'(r) - k^2 B_k(r) = 0, \quad 1 < r < 2,$$

$$B_k(1) = B_k'(2) = 0, \quad \forall k.$$

Ненулевое решение имеет только задача 2):

$$A_2(r) = \frac{1}{85}\left(17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}\right).$$

Тогда

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{85}\left(17r^3 - 49r^2 + 32r^{-2}\right)\cos 2\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, получим:

$$u(x,y) = \frac{1}{85}(x^2 - y^2)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{32}{(x^2 + y^2)^2} - 49\right).$$

Задача Немана для уравнения Пуассона в кольце

$$\begin{cases} \Delta v(r,\phi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\phi\phi} = r\cos 2\phi, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \\ v_r(1,\phi) = 0, \quad v_r(2,\phi) = 1, \quad 0 \le \phi \le 2\pi. \end{cases}$$

Домашнее задание

С.157, № 66.

Подготовка к контрольной работе (**17 мая 2023 г.**)

Примерный вариант