



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---



Занятие № 7

**22.03.2023**

**Занятие № 6**

**Краевые задачи для уравнения теплопроводности на прямой. Интеграл Пуассона**

**Задача Коши** для уравнения теплопроводности на прямой:

$$\begin{aligned}u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad |x| < +\infty,\end{aligned}\tag{1}$$

имеет решение, представимое с помощью **интеграла Пуассона**:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,\tag{2}$$

где функция

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\tag{3}$$

является **фундаментальным решением** уравнения теплопроводности на прямой (функция Грина).

Заметим, что 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) d\xi = 1.\tag{4}$$

## Задача 1

Построить решение краевой задачи для уравнения теплопроводности на прямой (задача Коши):

$$\begin{aligned}u_t &= 4u_{xx} + 8u_x + 3u + e^{-x}(1 + te^{-t}), & |x| < +\infty, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= 2e^{-x}, & |x| < +\infty.\end{aligned}\quad (1.1)$$

**Решение.**

**1. Приведение краевой задачи к виду (1).** Будем искать решение краевой задачи (1.1) в виде:

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

определив коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция  $v(x, t)$ , не содержало самой функции  $v$  и ее производной  $v_x$ .

✓ Для определения коэффициентов все слагаемые из правой части уравнения задачи (1.1) перенесем в левую часть. Так как

$$\begin{array}{l|l} -3 & u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t), \\ -8 & u_x = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha v + v_x), \\ 1 & u_t = e^{\alpha x + \beta t} (\beta v + v_t), \\ -4 & u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \end{array}$$

то функция  $v(x, t)$  и ее производная  $v_x$  входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{l|l} v & e^{\alpha x + \beta t} (-3 - 8\alpha + \beta - 4\alpha^2) \\ v_x & e^{\alpha x + \beta t} (-8 - 8\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x + \beta t} \cdot 1 \\ v_{xx} & -4e^{\alpha x + \beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$\begin{cases} -8 - 8\alpha = 0, \\ -3 - 8\alpha + \beta - 4\alpha^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1, \\ \beta = -1, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция  $v(x, t)$ :

$$v_t = 4v_{xx} + t + e^t. \quad (1.2)$$

А для функции  $u(x, t)$  будем иметь

$$u(x, t) = e^{-x-t} v(x, t). \quad (1.3)$$

Подставляя выражение (1.3) в начальное условие задачи (1.1), получим начальное условие для функции  $v(x, t)$ :

$$v(x, 0) = 2, \quad |x| < +\infty. \quad (1.4)$$

**2. Построение решения краевой задачи (1.2), (1.4) с помощью формулы (2), учитывая свойство функции Грина (4):**

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau + e^\tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \zeta, t) d\zeta + \int_0^t (\tau + e^\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= 2 + \int_0^t (\tau + e^\tau) d\tau = 1 + \frac{t^2}{2} + e^t. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $u(x, t) = \left(1 + e^t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-x-t}$ .

## Задача 2

Решить задачу Коши:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + e^{-t}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos x, \quad |x| < +\infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Зачастую вычисления, связанные с интегралом Пуассона, являются громоздкими. Для широкого класса функций  $f(x,t)$  и  $\varphi(x)$  можно применить **метод частных решений**. Для этого заметим, что оператор теплопроводности  $Lu = u_t - a^2 u_{xx}$  переводит (отображает), например, функции вида  $g(t) \sin \lambda x$  и  $g(t) \cos \lambda x$  в функции того же вида  $h(t) \sin \lambda x$  и  $h(t) \cos \lambda x$  соответственно.

Разобьем задачу (2.1) на две:

$$1) \quad v_t = v_{xx} + e^{-t}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad |x| < +\infty,$$

$$2) \quad w_t = w_{xx}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$w(x, 0) = \cos x, \quad |x| < +\infty.$$

Решение первой задачи (2.2) найдем с помощью формулы Пуассона (2):

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}.$$

Решение второй задачи (2.3) будем искать в виде  $w(x, t) = g(t) \cos x$ , где функция  $g(t)$  подлежит определению. Подставляя это выражение в уравнение и начальное условие задачи (2.3), будем иметь

$$g'(t) \cos x = -g(t) \cos x, \quad g(0) \cos x = \cos x.$$

Отсюда получаем задачу Коши

$$\begin{cases} g'(t) = -g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решением является функция  $g(t) = e^{-t}$ . Следовательно,  $w(x, t) = e^{-t} \cos x$ . Суммируя решения задач (2.2) и (2.3), получим решение задачи (2.1):

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = 1 - e^{-t} + e^{-t} \cos x.$$

### Задача 3

Решить задачу Коши:

$$u_t = 4u_{xx} + \sin t \cdot \cos x, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \cos x + \sin x, \quad |x| < +\infty.$$

Решение можно построить, разбив задачу (3.1) на две:

$$1) \quad v_t = 4v_{xx} + \sin t \cdot \cos x, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$w(x, 0) = \cos x, \quad |x| < +\infty.$$

$$2) \quad w_t = 4w_{xx}, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$w(x, 0) = \sin x, \quad |x| < +\infty.$$

Тогда решение задачи (3.1) найдем в виде суммы:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \quad (3.4)$$

Обе задачи (3.2) и (3.3) можно решить, применив метод частных решений. Решение первой задачи ищем в виде  $v(x, t) = g(t) \cos x$ , а второй –  $w(x, t) = h(t) \sin x$ .



Покажите, что функции  $g(t)$  и  $h(t)$  являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} g'(t) = -4g(t) + \sin t, \\ g(0) = 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} h'(t) = -4h(t), \\ h(0) = 1, \end{cases}$$

соответственно. Найдите их решения.

**Ответ:**  $u(x, t) = \frac{1}{17}(e^{-4t} - \cos t + 4 \sin t) \cos x + e^{-4t} \sin x.$



## Домашнее задание

Глава V. §6: стр. 174, № 72 (2).

Решите [задачу 1](#) методом частных решений.

Завершить решение [задачи 3](#).

Решите задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin t + \cos t \cos 3x, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 1 + 2 \cos 3x, \quad |x| < +\infty.$$

29.03.2023



**Занятие № 7. Краевые задачи для уравнения теплопроводности.  
Интеграл Пуассона**

### Разбор домашнего задания

**С. 174, § 6, № 72 (2).** Решить задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + \sin t, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad |x| < +\infty.$$

Решение задачи дается формулой [\(2\)](#) при  $a = 1$ :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \tau G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (72.1)$$

где  $G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$ . Так как  $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) d\xi = 1$ , то

для второго интеграла будем иметь:

$$\int_0^t \sin \tau \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau = 1 - \cos t.$$

Вычислим первый интеграл в (72.1). Так как

$$\frac{(x - \xi)^2}{4t} + \xi^2 = \left[ \sqrt{\frac{1+4t}{4t}} \xi - \frac{x}{\sqrt{4t(1+4t)}} \right]^2 + \frac{x^2}{1+4t},$$

то получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} G(x, \xi, t) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left[ \sqrt{\frac{1+4t}{4t}} \xi - \frac{x}{\sqrt{4t(1+4t)}} \right]^2 \right\} d\xi =$$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Замена:} \\ \sqrt{\frac{1+4t}{4t}} \xi - \frac{x}{\sqrt{4t(1+4t)}} = z \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} + 1 - \cos t.$$

## Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой

См. лекцию на тему [«Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения»](#)

### Задача 1

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

Граничная функция  $\mu(t)$  является непрерывной, ограниченной и  $\mu(0) = 0$ . (4)

### Решение:

Будем искать решение (1)–(3) задачи в виде

$$u(x, t) = \mu(t) + w(x, t), \quad (5)$$

где функция  $w(x, t)$  является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} - \mu'(t), & x > 0, \quad t > 0, \\ w(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Так как фундаментальным решением уравнения теплопроводности на полупрямой (функцией Грина) с граничным условием 1-го рода является функция<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup> См. лекцию на тему [«Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой. Метод продолжения»](#)



$$G_1(x, \xi, t) = G(x, \xi, t) - G(x, -\xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}},$$

то для решения задачи (6) имеем

$$w(x, t) = -\int_0^t \int_0^{+\infty} \mu'(\tau) G_1(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau = -\int_0^t \mu'(\tau) \int_0^{+\infty} G_1(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau. \quad (7)$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$\int_0^{+\infty} G_1(x, \xi, t - \tau) d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi.$$

Выполнив для 1-го интеграла замену  $z = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$ , а для второго –

$$z = \frac{x+\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} G_1(x, \xi, t - \tau) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-x/2a\sqrt{t-\tau}}^{+\infty} e^{-z^2} dz - \int_{x/2a\sqrt{t-\tau}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2a\sqrt{t-\tau}}^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

Тогда

$$w(x, t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu'(\tau) \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} dz d\tau.$$

Применив правило интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned}
 w(x,t) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \mu(\tau) \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} dz \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_0^{x/2a\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} dz \right) d\tau \right) = \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \mu(t) \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz - \frac{1}{4a} \int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau \right) = \\
 &= -\mu(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau.
 \end{aligned}$$

Подставив построенное для  $w(x,t)$  выражение в (5), получим решение задачи (1)-(3):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (8)$$

Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x,t) = \mu(t)$ .

В интеграле (8) выполним замену  $z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$ .

Так как

$$dz = \frac{x}{4a\sqrt{(t-\tau)^3}} d\tau \quad \text{и} \quad \tau = t - \frac{x^2}{4a^2 z^2},$$

то будем иметь

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2a\sqrt{t}}^{+\infty} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2 z^2}\right) \exp(-z^2) dz.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mu(t) \exp(-z^2) dz = \mu(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-z^2) dz = \mu(t).$$

**Свойство интеграла Пуассона.** Пусть функция  $\Phi(x)$  определена и непрерывна на прямой, является нечетной относительно точки  $x = 0$  и  $2l$ -периодичной. Докажите, что функция  $u(x, t)$ , определяемая интегралом Пуассона, удовлетворяет условиям:  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ .

**Доказательство.** Так как функция  $G(0, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}$  является четной относительно точки  $\xi=0$ , то произведение  $\Phi(\xi)G(0, \xi, t)$  - функция нечетная относительно точки  $\xi=0$ . Тогда

$$u(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(0, \xi, t) d\xi = 0$$

как интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке.

Для  $u(l, t)$  справедливы следующие преобразования:

$$u(l, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)G(l, \xi, t) d\xi = \left[ \begin{array}{c} \text{Замена} \\ \eta = \xi - l \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(l, \eta + l, t) d\eta.$$

Так как  $G(l, \eta + l, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(l-(\eta+l))^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2 t}} = G(0, \eta, t)$ , то

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^0 \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t) d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t) d\eta = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \Phi(-\eta + l)G(0, -\eta, t)d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t)d\eta \ominus$$

Так как  $\Phi(-\eta + l) = -\Phi(\eta - l)$ ,  $G(0, -\eta, t) = G(0, \eta, t)$ , то

$$\ominus - \int_0^{+\infty} \Phi(\eta - l)G(0, \eta, t)d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t)d\eta \ominus$$

Так как  $\Phi(\eta - l) = \Phi(\eta - l + 2l) = \Phi(\eta + l)$ , то

$$\ominus - \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t)d\eta + \int_0^{+\infty} \Phi(\eta + l)G(0, \eta, t)d\eta = 0.$$



### Домашнее задание

- 1) Подготовить визуализацию решения задания № 72 (2).
- 2) Решите краевую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Граничная функция  $\mu(t)$  является непрерывной, ограниченной и  $\mu(0) = 0$ .