



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---

**8.02.2023**

### **Занятие № 1. Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа**

#### **Примерный вариант контрольного задания**

В области  $0 < x < \pi$ ,  $t > 0$  решите следующую смешанную задачу:

$$u_{tt} - 4u_{xx} + 16u_x + 4u_t - 4(\cos t + 4) = e^{2x} \sin 5x - \sin t,$$

$$u(0, t) = \sin t, \quad u(\pi, t) = \pi + \sin t,$$

$$u(x, 0) = x + 2e^{2x} \cos x \sin 5x, \quad u_t(x, 0) = 1.$$

Решение задачи можно искать в виде:

$$u(x, t) = x + \sin t + w(x, t), \quad \left| \begin{array}{l} \text{(избавляемся от неоднородности в граничных условиях)} \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $w(x, t)$  является решением следующей краевой задачи:

$$w_{tt} - 4w_{xx} + 16w_x + 4w_t = e^{2x} \sin 5x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$w(x, 0) = 2e^{2x} \cos x \sin 5x, \quad w_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (4)$$

Уравнение краевой задачи можно упростить, если искать его решение в виде

$$w(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

определив коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция  $v(x, t)$ , не содержало ее производных по переменным  $x$  и  $t$ .

Так как

$$\begin{array}{l|l} 0 & w(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t), \\ 16 & w_x = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha v + v_x), \\ 4 & w_t = e^{\alpha x + \beta t} (\beta v + v_t), \\ -4 & w_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\ 1 & w_{tt} = e^{\alpha x + \beta t} (\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}), \end{array}$$

то функция  $v(x, t)$  и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{l|l} v & e^{\alpha x + \beta t} (16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2) \\ v_x & e^{\alpha x + \beta t} (16 - 8\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x + \beta t} (4 + 2\beta) \\ v_{xx} & -4e^{\alpha x + \beta t} \\ v_{tt} & e^{\alpha x + \beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы

$$\begin{cases} 16 - 8\alpha = 0, \\ 4 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2, \\ \beta = -2, \end{cases}$$

(при этом  $16\alpha + 4\beta - 4\alpha^2 + \beta^2 = 12$ )

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция  $v(x, t)$ :

$$v_{tt} - 4v_{xx} + 12v = e^{2t} \sin 5x. \quad (6)$$

A

$$w(x, t) = e^{2x-2t} v(x, t). \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в условия (3) и (4), получим условия для функции  $v(x, t)$ :

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$v(x, 0) = 2 \cos x \sin 5x, \quad v_t(x, 0) = 4 \cos x \sin 5x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (9)$$

Будем искать решение краевой задачи (6), (8), (9) в виде ряда по собственным функциям:

$$v(x, t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции  $X_k(x) = \sin kx$ ,  $k \in N$ , являются решениями соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} X''(x) + cX(x) &= 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) &= 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx. \quad (10)$$

Подставляя ряд (10) в (6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t)) \sin kx = e^{2t} \sin 5x.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = \begin{cases} e^{2t}, & k = 5, \\ 0, & k \neq 5. \end{cases}$$

Подставляя ряд (10) в начальные условия (9), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin kx = 2 \cos x \sin 5x = \sin 6x + \sin 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k(0) = \begin{cases} 1, & k = 4, 6, \\ 0, & k \neq 4, 6, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin kx = 4 \cos x \sin 5x = 2 \sin 6x + 2 \sin 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k'(0) = \begin{cases} 2, & k = 4, 6, \\ 0, & k \neq 4, 6. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

$$1) \begin{cases} T_4''(t) + 76T_4(t) = 0, & t > 0, \\ T_4(0) = 1, & T_4'(0) = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} T_5''(t) + 112T_5(t) = e^{2t}, & t > 0, \\ T_5(0) = 0, & T_5'(0) = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} T_6''(t) + 156T_6(t) = 0, & t > 0, \\ T_6(0) = 1, & T_6'(0) = 2. \end{cases}$$

$$4) \forall k \neq 4, 5, 6:$$

$$\begin{cases} T_k''(t) + (4k^2 + 12)T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0, & T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Задачи 1)-4) имеют следующие решения:

$$T_4(t) = \cos(\sqrt{76}t) + \frac{2}{\sqrt{76}} \sin(\sqrt{76}t);$$

$$T_5(t) = \frac{1}{116} \left( e^{2t} - \cos(\sqrt{112}t) - \frac{2}{\sqrt{112}} \sin(\sqrt{112}t) \right);$$

$$T_6(t) = \cos(\sqrt{156}t) + \frac{2}{\sqrt{156}} \sin(\sqrt{156}t);$$

$$T_n(t) = 0, \quad \forall n \neq 4, 5, 6.$$

Следовательно, используя формулы (10), (7) и (1), найдем:

$$u(x, t) = x + \sin t + e^{2(x-t)} (T_4(t) \sin 4x + T_5(t) \sin 5x + T_6(t) \sin 6x).$$



### Домашнее задание

Домашняя контрольная работа не тему «[Смешанная краевая задача для уравнения гиперболического типа](#)»

Срок выполнения: **22 февраля**