



02.12.2022

Занятие № 14

Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

Гл. 5, § 4, с. 150: № 31 (1)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Ненулевое решение краевой задачи будем искать в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4)$$

Подставив (4) в уравнение (1) и разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Равенство должно выполняться при любых $x \in (0, l)$ и $t > 0$, что возможно, если оба отношения равны некоторой константе, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -c, \quad c = \text{const}, \quad (5)$$

Откуда получаем два дифференциальных уравнения с параметром c :

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

$$T''(t) + ca^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Подставляя (4) в граничные условия (2):

$$X'(0)T(t) = X'(l)T(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

и, учитывая, что $T(t)$ не может быть тождественно равной 0, получим

$$X'(0) = X'(l) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (6) и условия (8) дают соответствующую краевой задаче задачу Штурма-Лиувилля, решением которой будут собственные числа и соответствующие им собственные функции (см. [Занятие № 13](#)):

$$c_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Остается для каждого значения параметра $c = c_k$ найти общее решение уравнения (7). Оно имеет следующий вид:

$$T_k(t) = \begin{cases} A_0 + B_0 t, & k = 0, \\ A_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ak\pi t}{l}, & k \neq 0, \end{cases} \quad (9)$$

где A_k и B_k – произвольные *const*.

Согласно методу Фурье, решение заданного уравнения (1) запишем в

виде ряда $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$:

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ak\pi t}{l} \right) \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (10)$$

Неизвестные константы A_k и B_k найдем, подчинив ряд (10) начальным условиям (3):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{l} = x, \\ u_t(x, 0) &= B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты A_k и B_k являются коэффициентами разложений функций x и 1 соответственно в ряды по собственным функциям задачи Ш-Л:

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{l}{2}, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{4l}{(k\pi)^2}, & k = 2n - 1, \end{cases}$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad B_0 = 1, \quad B_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, решением задачи (1) – (3) является функция:

$$u(x, t) = \frac{l}{2} + t + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^k - 1)}{k^2} \cos \frac{ak\pi t}{l} \right) \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Выражение для $u(x, t)$ может быть записано и в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{l}{2} + t + \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{a(2n-1)\pi t}{l} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

Гл. 5, § 4, с. 152: № 38 (7)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t} \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 4 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

Будем искать решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x, t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x)$ являются решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (*)$$

$$X'(0) = X(\pi) = 0. \quad (**)$$

Решение задачи Ш-Л.

Рассмотрим три случая:

1) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (*) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X(\pi) = Ae^{\lambda\pi} + Be^{-\lambda\pi} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (*), (**) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если $c = 0$, то общее решение уравнения (*):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = A\pi + B = 0.$$

Откуда получаем, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (*):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X(\pi) = A \cos(\lambda \pi) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\cos \lambda \pi = 0 \Leftrightarrow \lambda \pi = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, нашли собственные значения¹:

$$c_n = \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{(2n+1)x}{2}, \quad \forall A_n \neq 0.$$

Пусть $A_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|X_n\|^2 = \int_0^\pi \cos^2 \frac{(2n+1)x}{2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{(2n+1)x}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|X_n\|^2 = \frac{\pi}{2}.$$

¹ При отрицательных значениях n не будут получены новые значения c .



Домашнее задание

Гл. 5, § 4: № 31 (2).

09.12.2022

Занятие № 15

Решение краевых задач для волнового уравнения на отрезке методом Фурье

Гл. 5, § 4, с. 152: № 38 (7). Продолжение решения

Будем искать решение краевой задачи в виде ряда по собственным функциям:

$$u(x, t) = \sum_k T_k(t) X_k(x).$$

Собственные функции $X_k(x) = \cos \frac{(2k+1)x}{2}$ являются решением соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (*)-(**):

$$\begin{aligned} X''(x) + cX(x) &= 0, & 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X(\pi) &= 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos \frac{(2k+1)x}{2} \quad (4)$$

Подставляя ряд (4) в (1) и объединяя два ряда в один, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(T_k''(t) + \frac{a^2(2k+1)^2}{4} T_k(t) \right) \cos \frac{(2k+1)x}{2} = Ae^{-t} \cos \frac{x}{2}.$$

Отсюда, используя правило разложения функции в ряд по собственным, будем иметь:

$$T_k''(t) + \frac{a^2(2k+1)^2}{4} T_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A e^{-t} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{(2k+1)x}{2} dx = \begin{cases} A e^{-t}, & k=0, \\ 0 & k \neq 0. \end{cases}$$

Подставляя ряд (4) в начальные условия (3), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \cos \frac{(2k+1)x}{2} = 0 \Rightarrow T_k(0) = 0 \quad \forall k.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) \cos \frac{(2k+1)x}{2} = 4 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin x = 2(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{5x}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_k'(0) = \begin{cases} 2, & k=0, \\ -2, & k=2, \\ 0 & k \neq 0, 2. \end{cases}$$

Таким образом, построены следующие задачи Коши:

$$1) \begin{cases} T_0''(t) + \frac{a^2}{4} T_0(t) = A e^{-t}, & t > 0, \\ T_0(0) = 0, \quad T_0'(0) = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} T_2''(t) + \frac{25a^2}{4} T_2(t) = 0, & t > 0, \\ T_2(0) = 0, \quad T_2'(0) = -2. \end{cases}$$

$$3) \quad \forall k \neq 0, 2:$$

$$\begin{cases} T_k''(t) + \frac{a^2(2k+1)^2}{4} T_k(t) = 0, & t > 0, \\ T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Решив задачи Коши, найдем:

$$1) \quad T_0(t) = \frac{4A}{a^2+4} \left(e^{-t} - \cos \frac{at}{2} + \frac{2}{a} \sin \frac{at}{2} \right) + \frac{4}{a} \sin \frac{at}{2},$$

$$2) \quad T_2(t) = -\frac{4}{5a} \sin \frac{5at}{2},$$

$$3) \quad T_k(t) = 0, \quad \forall k \neq 0, 2.$$

Подставляя найденные выражения для $T_k(t)$ в (4), получим решение краевой задачи (1)–(3):

$$u(x, t) = \left(\frac{4A}{a^2+4} \left(e^{-t} - \cos \frac{at}{2} + \frac{2}{a} \sin \frac{at}{2} \right) + \frac{4}{a} \sin \frac{at}{2} \right) \cos \frac{x}{2} - \frac{4}{5a} \sin \frac{5at}{2} \cos \frac{5x}{2}.$$



Домашнее задание

Подготовка к зачетной работе (**16 декабря**)

Решить примерный вариант зачетного задания:

ЗАЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ

УЧП

Примерный вариант

1. Найдите решение $u = u(x, y)$ следующей краевой задачи:

$$u_x - 2x u_y = 0, \quad u(1, y) = y^2.$$

2. Определите тип уравнения:

$$u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} - 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u - x = 0.$$

3. Найдите общее решение $u = u(x, y)$ уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 5u_x - 25u_y = 0.$$

4. Приведите уравнение к каноническому виду:

$$u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} - y u_y = 0.$$

5. В области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ решите задачу Коши:

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + 4u_x - 3u = 0,$$

$$u(x, 0) = e^{2x} \sin x, \quad u_t(x, 0) = e^{2x} (\cos x - \sin x).$$