



18.11.2022

Занятие № 12

Задача Штурма-Лиувилля

При каких значениях параметра c задача

$$X''(x) + cX(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0, \quad (2)$$

имеет ненулевое решение.

Собственные значения задачи Ш-Л являются **вещественными**.

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (а): $X(0) = X(l) = 0$.

Рассмотрим три случая:

- 1) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0, \\ X(l) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

- 2) Если $c = 0$, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X(0) = B = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = Al + B = 0.$$

Откуда получаем, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X(0) = A = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X(l) = B \sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin \lambda l = 0 \Leftrightarrow \lambda l = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, нашли собственные значения¹:

$$c_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \forall B_n \neq 0.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, отличаются на постоянный множитель.

Пусть $B_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$.

Ортогональность собственных функций.

$$\begin{aligned} (X_k, X_n) &= \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{(k-n)\pi x}{l} - \cos \frac{(k+n)\pi x}{l} \right) dx = 0 \quad \forall k \neq n. \end{aligned}$$

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l}{2}.$$

¹ При отрицательных значениях n не будут получены новые значения c .

Разложение функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Гл. 5, § 3, с. 132: № 25

Разложение функции $f(x)$ в ряд по системе функций $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

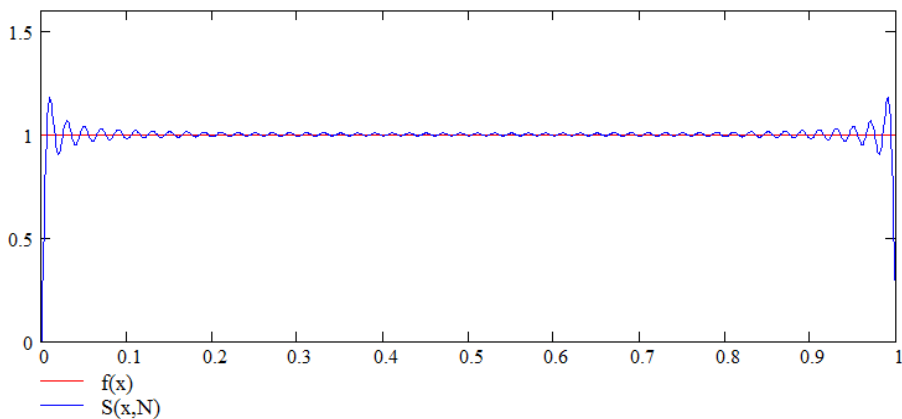
$$S(x, N) = \sum_{n=1}^N f_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S(x, N).$$

1) $f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l).$$



$N = 99$

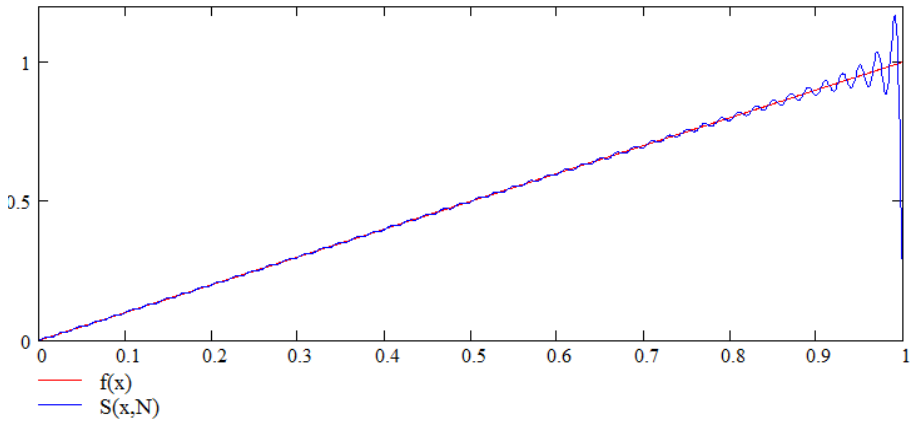


2) $f(x) = x$

$$f(x) = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [0, l].$$



N = 99

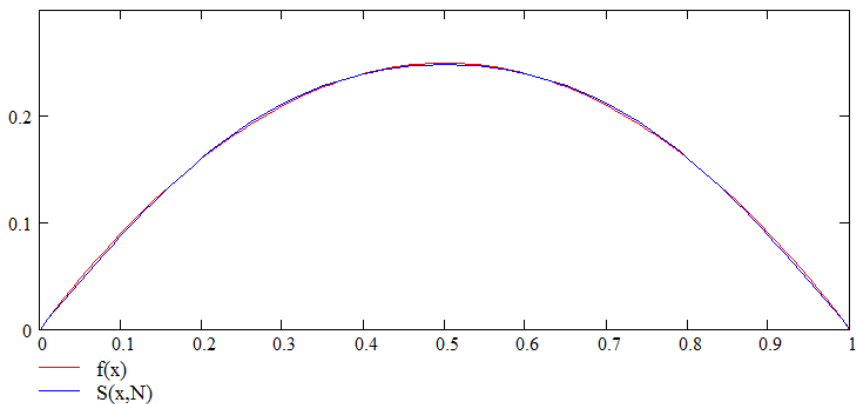


3) $f(x) = x(l-x)$

$$f(x) = \frac{4l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)}{k^3} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [1, l].$$



N = 4





Домашнее задание

С. 131, № 23 (б) (+ проверить свойство ортогональности собственных функций, вычислить нормы собственных функций).

25.11.2022

Занятие № 13

Задача Штурма-Лиувилля

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (г): $X'(0) = X'(l) = 0$.

Рассмотрим три случая:

- 1) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X'(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \quad \lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = B, \\ B(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

- 2) Если $c = 0$, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \quad \text{и} \quad X'(l) = A = 0.$$

Получаем, что при $c = 0$ существует ненулевое решение $X(x) = B$, когда $B = \forall \text{ const} \neq 0$. Пусть $B = 1$.

$$c_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad \|X_0\|^2 = \int_0^l 1 dx = l.$$

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \Rightarrow B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X'(l) = A\lambda \sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin \lambda l = 0 \Leftrightarrow \lambda l = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, учитывая условие $\lambda \neq 0$, нашли собственные значения²:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \forall A_n \neq 0.$$

Пусть $A_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тогда $\|X_n\|^2 = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$.

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \|X_n\|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \frac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (д): $X(0) = X'(l) + hX(l) = 0$, $h - \text{const} > 0$.

Рассмотрим три случая:

1) Если $c < 0$ (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

² При отрицательных значениях n не будут получены новые значения c .

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) + h(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ A(\lambda e^{\lambda l} + h e^{\lambda l}) + B(h e^{-\lambda l} - \lambda e^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Полученная система имеет ненулевое решение (A, B), если определитель матрицы системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda e^{\lambda l} + h e^{\lambda l} & h e^{-\lambda l} - \lambda e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) + h(e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}) = 0.$$

Очевидно, при $\lambda < 0$ левая часть уравнения больше 0, а при $\lambda > 0$ – отрицательна. Следовательно, уравнение не имеет вещественных корней, отличных от 0. А значит, определитель матрицы системы (*) отличен от 0 при любых $\lambda \neq 0$, и система (*) имеет нулевое решение $A = B = 0$.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если $c = 0$, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X(0) = B = 0 \quad \text{и} \quad X'(l) + hX(l) = A(1 + hl) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Получаем, что при $c = 0$ существует только нулевое решение $X(x) \equiv 0$.

3) Если $c > 0$ (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X(0) = A = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

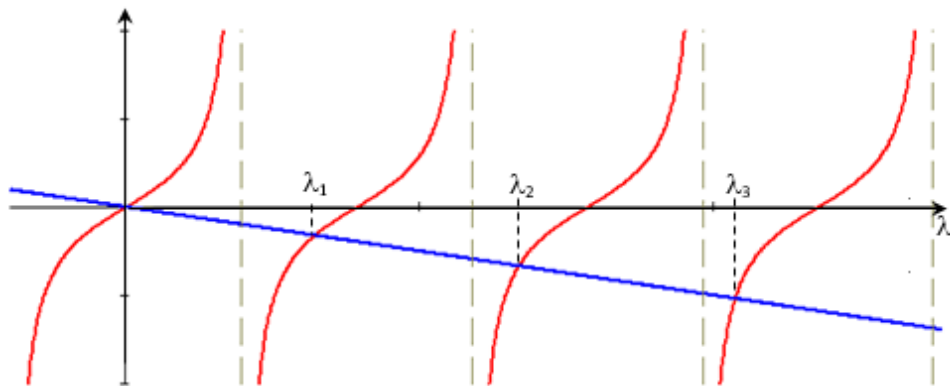
$$X'(l) + hX(l) = B(\lambda \cos(\lambda l) + h \sin(\lambda l)) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\lambda \cos(\lambda l) + h \sin(\lambda l) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\lambda l) = -\frac{\lambda}{h}. \quad (**)$$

Заметим, что, если λ^* является корнем уравнения (**), то и $(-\lambda^*)$ также является корнем уравнения (**). Тогда, так как $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$, то для нахождения собственных значений следует выяснить, сколько положительных корней имеет уравнение (**).

Графическое решение уравнения (**):



позволяет сделать следующий вывод: *существует бесконечное счетное множество положительных корней уравнения (**)* $\lambda_n, n \in N$.

Следовательно, собственные значения задачи Ш-Л:

$$c_n = \lambda_n^2,$$

где λ_n – положительные корни уравнения (**), и соответствующие им собственные функции:

$$X_n(x) = B_n \sin \lambda_n x, \quad \forall B_n \neq 0.$$

Пусть $B_n = 1 \quad \forall n \in N$, тогда

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2\lambda_n x) dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin(2\lambda_n l)}{4\lambda_n}.$$

Так как

$$\sin(2\lambda_n l) = \frac{2 \operatorname{tg} \lambda_n l}{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda_n l} \stackrel{(**)}{=} -\frac{2\lambda_n h}{h^2 + \lambda_n^2},$$

то

$$\|X_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \lambda_n^2)}.$$

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \lambda_n^2, \quad X_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad n \in N, \quad \|X_n\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + h^2) + h}{2(\lambda_n^2 + h^2)},$$

где λ_n – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) = -\frac{\lambda}{h}$.



Домашнее задание

C. 127, Пример 1.

C. 132, № 26.

Ортогональность собственных функций

Рассмотрим собственные функции $X_n(x) = \sin \lambda_n x$, $X_k(x) = \sin \lambda_k x$, соответствующие различным собственным значениям, где $c_n = \lambda_n^2$, $c_k = \lambda_k^2$ – различные корни уравнения (**). Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^l X_n X_k dx &= \int_0^l \sin \lambda_n x \sin \lambda_k x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (\cos(\lambda_n - \lambda_k)x - \cos(\lambda_n + \lambda_k)x) dx = \\ &= \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_k)l}{2(\lambda_n - \lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_k)l}{2(\lambda_n + \lambda_k)} = \frac{1}{2(\lambda_n^2 - \lambda_k^2)} (\lambda_n (\sin(\lambda_n - \lambda_k)l - \sin(\lambda_n + \lambda_k)l) + \\ &\quad + \frac{1}{2(\lambda_n^2 - \lambda_k^2)} (\lambda_k (\sin(\lambda_n - \lambda_k)l + \sin(\lambda_n + \lambda_k)l)) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} (-\lambda_n \sin \lambda_k l \cdot \cos \lambda_n l + \lambda_k \sin \lambda_n l \cdot \cos \lambda_k l) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} \cos \lambda_n l \cdot \cos \lambda_n l (-\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_k l + \lambda_k \operatorname{tg} \lambda_n l) = \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} \cos \lambda_n l \cdot \cos \lambda_n l \left(-\lambda_n \cdot \left(-\frac{\lambda_k}{h} \right) + \lambda_k \cdot \left(-\frac{\lambda_n}{h} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$