Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

30.09.2022

Самостоятельная работа N 1
«Простейшие уравнения в частных производных».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

Занятие № 5

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Общая схема преобразования уравнения

<table>
<tr><td colspan="3">$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x.u_y)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Тип уравнения</td></tr>
<tr><td>$B^2 - AC > 0$</td><td>$B^2 - AC = 0$</td><td>$B^2 - AC < 0$</td></tr>
<tr><td>гиперболический</td><td>параболический</td><td>эллиптический</td></tr>
<tr><td colspan="3">Уравнение характеристик</td></tr>
<tr><td colspan="3">$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Первые интегралы уравнения характеристик
(семейства характеристик)</td></tr>
<tr><td>$\varphi(x,y) = C_1,$
$\psi(x,y) = C_2$</td><td>$\varphi(x,y) = C$</td><td>$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1,$
$\varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замена</td></tr>
</table>

$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$	$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases}$ $J\neq 0$	$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$
$u(x,y)=v(\xi,\eta),$ $u_x=v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x,$ $u_y=v_\xi\xi_y+v_\eta\eta_y,$ $u_{xx}=v_{\xi\xi}(\xi_x)^2+2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+v_{\eta\eta}(\eta_x)^2+v_\xi\xi_{xx}+v_\eta\eta_{xx},$ $u_{yy}=v_{\xi\xi}(\xi_y)^2+2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+v_{\eta\eta}(\eta_y)^2+v_\xi\xi_{yy}+v_\eta\eta_{yy},$ $u_{xy}=v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+v_\xi\xi_{xy}+v_\eta\eta_{xy}$		
Канонический вид		
$v_{\xi\eta}=\Phi$	$v_{\eta\eta}=\Phi$	$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=\Phi$
где $\Phi=\Phi(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta)$		

Гл. 2, § 5, с. 75: № 33 (1)

№ 33 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+u+x=0.$$

Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости.

1) Определение типа уравнения:

$d=1>0 \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип в любой точке плоскости.

2) Решение уравнения характеристик:

$$-2dydx-4(dx)^2=0 \Leftrightarrow dx(dy+2dx)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}dx=0,\\ dy+2dx=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=C_1,\\ y+2x=C_2.\end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=x,\quad \eta=y+2x,\quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y)=v(x,y+2x).$$

4) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & u_x = v_\xi + 2v_\eta \\
-2 & u_y = v_\eta \\
-4 & u_{yy} = v_{\eta\eta} \\
2 & u_{xy} = v_{\xi\eta} + 2v_{\eta\eta}
\end{array}
$$

5) Построение канонического уравнения. Подстановка построенных выражений в заданное уравнение дает:

$$\boxed{2v_{\xi\eta} + v_\xi + v + \xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\xi\eta} + \tfrac{1}{2}v_\xi + \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}\xi = 0.}$$

Гл. 2, § 5, с. 75: № 33 (2)

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 68-75: разбор примеров.

с. 75, № 33(3).

07.10.2022

Занятие № 6

Классификация уравнений в частных производных второго порядка (случай двух независимых переменных). Приведение уравнений к каноническому виду.

Гл. 2, § 5, с. 76: № 34 (1), 35 (1)

№ 34 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$u_{xx} - 2\sin x \cdot u_{xy} + (2 - \cos^2 x) \cdot u_{yy} = 0.$$

6) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости (нет таких x и y, при которых коэффициенты при вторых производных одновременно бы обращались в 0).

7) Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 x - (2 - \cos^2 x) = -1 \Rightarrow$ уравнение имеет эллиптический тип в любой точке плоскости.

8) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2\sin x \cdot dydx + (2 - \cos^2 x)(dx)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dy + \sin x \cdot dx)^2 + (dx)^2 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dy + \sin x dx + idx)(dy + \sin x dx - idx) = 0.$$

Два комплексно-сопряженных первых интеграла:

$$y - \cos x + ix = C_1, \quad y - \cos x - ix = C_2.$$

9) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y - \cos x, x).$$

10) Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
0 & u_x = \sin x \cdot v_\xi + v_\eta \\
0 & u_y = v_\xi \\
1 & u_{xx} = \sin^2 x \cdot v_{\xi\xi} + 2\sin x \cdot v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + \cos x \cdot v_\xi \\
2-\cos^2 x & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
-2\sin x & u_{xy} = \sin x \cdot v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}
\end{array}$$

11) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x + 2 - \cos^2 x - 2\sin^2 x = 1$	
$v_{\eta\eta}$	1	
$v_{\xi\eta}$	$2\sin x - 2\sin x = 0$	
v_ξ	$\cos x$	$\cos\eta$
v_η	0	

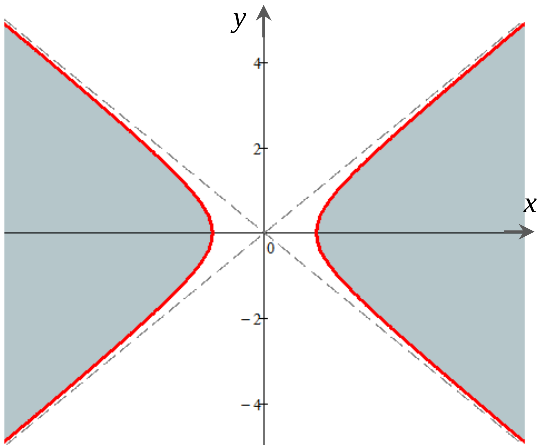
Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \cos\eta \cdot v_\xi = 0.$

№ 35 (1). Области параболичности, гиперболичности и эллиптичности уравнения: $(1 - x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1 + y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0.$

Дискриминант уравнения:

$$d = (xy)^2 + (1 - x^2)(1 + y^2) = 1 - x^2 + y^2.$$

Области, где сохранятся тип уравнения, описывают условия:

<table>
<tr><td>Область параболичности</td><td>Область гиперболичности</td><td>Область эллиптичности</td></tr>
<tr><td>$1 - x^2 + y^2 = 0$</td><td>$1 - x^2 + y^2 > 0$</td><td>$1 - x^2 + y^2 < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Уравнение $1 - x^2 + y^2 = 0$ на координатной плоскости Oxy определяет гиперболу, которая является границей областей

</td></tr>
<tr><td></td><td>Между ветвями гиперболы</td><td></td></tr>
</table>

№ 35 (2).

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 75-76: № 34 (2), 35 (3)

14.10.2022

Занятие № 7

Приведение уравнений к каноническому виду

№ 36 (1). Привести уравнение к каноническому виду

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$$

Определение типа уравнения:

$$d = x^2 - x\cdot(x-1) = x$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$x = 0$	$x > 0$	$x < 0$

<u>Область параболичности</u>

При $x = 0$ уравнение принимает вид: $u_{yy} = 0$ (канонический)

Уравнение характеристик:

$$x(dy)^2 - 2xdxdy + (x-1)(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow x(dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$$

$x > 0$	$x < 0$
$\left(\sqrt{x}\right)^2 (dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0.$	$\left(\sqrt{-x}\right)^2 (dy-dx)^2 + (dx)^2 = 0.$

<u>Область гиперболичности</u>

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 (dy-dx)^2 - (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0, \\ dy - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 0 \end{array}\right.$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2\sqrt{x} = c_1,$$

$$y - x - 2\sqrt{x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \\ \eta = y - x - 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$u(x,y) = v(y - x + 2\sqrt{x}, y - x - 2\sqrt{x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

0	$u_x = v_\xi\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+v_\eta\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
0	$u_y = v_\xi + v_\eta$
x	$u_{xx} = v_{\xi\xi}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2v_{\xi\eta}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+ + v_{\eta\eta}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - v_\xi\frac{1}{2x\sqrt{x}} + v_\eta\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
$x-1$	$u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}$
$2x$	$u_{xy} = v_{\xi\xi}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+v_{\xi\eta}\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+v_{\eta\eta}\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x\cdot\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x\left(-1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$	
$v_{\eta\eta}$	$x\cdot\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + x - 1 + 2x\left(-1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$	
$v_{\xi\eta}$	$2x\left(1-\frac{1}{x}\right)+2(x-1)-4x=-4$	
v_ξ	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{2}{\xi-\eta}$
v_η	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{\xi-\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(v_\xi - v_\eta) = 0.$

Область эллиптичности

$$\left(\sqrt{-x}\right)^2(dy-dx)^2+(dx)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy-\left(1+\frac{i}{\sqrt{-x}}\right)dx=0, \\ dy-\left(1-\frac{i}{\sqrt{-x}}\right)dx=0 \end{array}\right.$$

Семейства характеристик:

$$y - x + 2i\sqrt{-x} = c_1,$$
$$y - x - 2i\sqrt{-x} = c_2$$

Замена

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = 2\sqrt{-x} \end{cases}$$

$$u(x, y) = v(y - x, 2\sqrt{-x})$$

Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = -v_\xi - v_\eta \frac{1}{\sqrt{-x}} \\ 0 & u_y = v_\xi \\ x & u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{-x}} - v_{\eta\eta} \frac{1}{x} + v_\eta \frac{1}{2x\sqrt{-x}} \\ x-1 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\ 2x & u_{xy} = -v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{-x}} \end{array}$$

Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$x + x - 1 - 2x = -1$	
$v_{\eta\eta}$	-1	
$v_{\xi\eta}$	$2x\frac{1}{\sqrt{-x}} - 2x\frac{1}{\sqrt{-x}} = 0$	
v_ξ	0	
v_η	$\frac{1}{2\sqrt{-x}}$	$\frac{1}{\eta}$

Канонический вид: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} v_\eta = 0.$

Задание 1. Привести уравнение к каноническому виду

$$xu_{xx} - 4x^2u_{xy} + 4x^3u_{yy} + u_x - 4xu_y - x(y + x^2) = 0. \qquad (1)$$

1) Уравнение является уравнением 2-го порядка в любой точке плоскости за исключением точек прямой $x = 0$.

2) Определение типа уравнения:

$d = 4x^4 - 4x^4 = 0 \ \Rightarrow$ уравнение имеет параболический тип.

3) Решение уравнения характеристик:

$$x(dy)^2 + 4x^2 dydx + 4x^3(dx)^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (dy + 2xdx)^2 = 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ dy + 2xdx = 0 \ \Rightarrow \ y + x^2 = C.$$

4) Переход к новым переменным:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$

$$u(x, y) = v(y + x^2, x).$$

5) Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
1 & u_x = 2xv_\xi + v_\eta \\
-4x & u_y = v_\xi \\
x & u_{xx} = 4x^2 v_{\xi\xi} + 4xv_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + 2v_\xi \\
4x^3 & u_{yy} = v_{\xi\xi} \\
-4x^2 & u_{xy} = 2xv_{\xi\xi} + v_{\xi\eta}
\end{array}$$

6) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η	Свободное слагаемое
0	x	0	0	1	$-x\,(y + x^2)$
	η			1	$-\xi\eta$
	$\eta \neq 0$				

Канонический вид:

$$\eta v_{\eta\eta} + v_\eta = \xi\eta \qquad (2)$$

Замечание. Так как переменная η может быть задана любым выражением, при котором преобразование независимых переменных будет невырожденным, то и канонический вид может быть другим. Так, если новые переменные ввести следующим образом:

$$\xi = y + x^2, \quad \eta = y, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta),$$

то канонический вид для уравнения (1) будет следующим:

$$(\xi - \eta)v_{\eta\eta} - v_\eta = \frac{\xi}{4}.$$

Домашнее задание

Гл. 2, §5 с. 76: № 36 (4).

21.10.2022

Занятие № 8

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

Продолжение решения Задания 1

7) Построение общего решения уравнения (2):

$$\eta v_{\eta\eta} + v_\eta = \xi\eta \quad \Leftrightarrow \quad (\eta v_\eta)'_\eta = \xi\eta,$$

$$\eta v_\eta = \frac{\xi\eta^2}{2} + C(\xi), \quad v_\eta = \frac{\xi\eta}{2} + \frac{C(\xi)}{\eta},$$

$$v(\xi,\eta) = \frac{\xi\eta^2}{4} + C(\xi)\ln|\eta| + \Phi(\xi).$$

8) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2(y+x^2)}{4} + C\left(y + x^2\right)\ln|x| + \Phi\left(y + x^2\right)} \qquad (3)$$

С. 86, № 40 (1).

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(x,0) = 3x^2, \quad u_y(x,0) = 0.$

1) Определение типа уравнения:

$$d = 1 + 3 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \text{ уравнение имеет гиперболический тип.}$$

2) Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 - 2dydx - 3(dx)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (dy - dx)^2 - 4(dx)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} dy - 3dx = 0, \\ dy + dx = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 3x = C_1, \\ y + x = C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi = y - 3x, \quad \eta = y + x, \quad u(x,y) \leftrightarrow v(\xi,\eta).$$

$$u(x,y) = v(y - 3x, y + x).$$

4) Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 0 & u_x = -3v_\xi + v_\eta \\ 0 & u_y = v_\xi + v_\eta \\ 1 & u_{xx} = 9v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ -3 & u_{yy} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ 2 & u_{xy} = -3v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$v_{\eta\eta}$	$v_{\xi\eta}$	v_ξ	v_η
0	0	–16	0	0

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta} = 0. \tag{2}$$

6) Построение общего решения уравнения (2):

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad v_\xi = C(\xi), \quad v(\xi,\eta) = \int C(\xi)d\xi + F(\eta) = \Phi(\xi) + \mathrm{F}(\eta).$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y) = \Phi(y - 3x) + F(y + x). \tag{3}$$

8) <u>*Построение частного решения*</u>

Найдем производную:

$$u_y(x,y) = \Phi'(y-3x) + F'(y+x).$$

Подставляя (3) в заданные условия $u(x,0) = 3x^2, \quad u_y(x,0) = 0,$ получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(x,0) = \Phi(-3x) + F(x) = 3x^2, \\ u_y(x,0) = \Phi'(-3x) + F'(x) = 0. \end{cases}$$

Решение системы (методом подстановки)

$$\begin{cases} F(x) = 3x^2 - \Phi(-3x), \\ \Phi'(-3x) + 6x + 3\Phi'(-3x) = 0 \end{cases}$$

$$\Phi'(-3x) = -\frac{3x}{2}, \quad \Phi'(t) = \frac{t}{2}, \quad \Phi(t) = \frac{t^2}{4} + C, \ C - const.$$

Подставляя полученное выражение для Φ в первое уравнение системы, найдем

$$F(x) = 3x^2 - \frac{9x^2}{4} - C = \frac{3x^2}{4} - C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{(y-3x)^2}{4} + \frac{3(y+x)^2}{4} = y^2 + 3x^2.}$$

№ 40 (3). Найти решение уравнения

$$(\sin^2 y - 4)u_{xx} - 2\sin y \cdot u_{xy} + u_{yy} - \cos y \cdot u_x = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее условиям: $u(\cos y, y) = \cos y, \quad u_x(\cos y, y) = \sin y.$

1) Определение типа уравнения:

$d = \sin^2 y - (\sin^2 y - 4) = 4 > 0 \ \Rightarrow$ уравнение имеет гиперболический тип.

2) Решение уравнения характеристик:

$$(\sin^2 y-4)(dy)^2+2\sin y dy dx+(dx)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dx+\sin y dy)^2-4(dy)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dx+(\sin y-2)dy=0, \\ dx+(\sin y+2)dy=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\cos y-2y=C_1, \\ x-\cos y+2y=C_2. \end{array}\right.$$

3) Переход к новым переменным:

$$\xi=x-\cos y-2y, \quad \eta=x-\cos y+2y, \quad u(x,y)\leftrightarrow v(\xi,\eta).$$
$$u(x,y)=v(x-\cos y-2y, x-\cos y+2y).$$

4) Выражение производных функции *u* через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l}
-\cos y & u_x=v_\xi+v_\eta \\
0 & u_y=(\sin y-2)v_\xi+(\sin y+2)v_\eta \\
(\sin^2 y-4) & u_{xx}=v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta} \\
1 & u_{yy}=(\sin y-2)^2 v_{\xi\xi}+2(\sin^2 y-4)v_{\xi\eta}+(\sin y+2)^2 v_{\eta\eta}+ \\
 & \qquad +\cos y\cdot v_\xi+\cos y\cdot v_\eta \\
-2\sin y & u_{xy}=(\sin y-2)v_{\xi\xi}+2\sin y\cdot v_{\xi\eta}+(\sin y+2)v_{\eta\eta}
\end{array}$$

5) Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 y-4+(\sin y-2)^2-2\sin y(\sin y-2)=0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 y-4+(\sin y+2)^2-2\sin y(\sin y+2)=0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 y-4)+2(\sin^2 y-4)-4\sin^2 y=-16$
v_ξ	$-\cos y+\cos y=0$
v_η	$-\cos y+\cos y=0$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta}=0$$

6) Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi,\eta)=\Phi(\xi)+\Psi(\eta). \tag{2}$$

7) Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения (1):

$$u(x,y)=\Phi(x-\cos y-2y)+\Psi(x-\cos y+2y). \qquad (3)$$

Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (2)

---

8) *Построение частного решения*

Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(\cos y, y)=\cos y,\quad u_x(\cos y, y)=\sin y,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} u(\cos y, y)=\Phi(-2y)+F(2y)=\cos y, \\ u_x(\cos y, y)=\Phi'(-2y)+F'(2y)=\sin y. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (методом подстановки)

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$-2\Phi'(-2y)+2F'(2y)=-\sin y \;\Rightarrow\; \Phi'(-2y)=\tfrac{1}{2}\sin y+F'(2y).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$\tfrac{1}{2}\sin y+F'(2y)+F'(2y)=\sin y \;\Rightarrow\; F'(2y)=\tfrac{1}{4}\sin y,$$

$$F'(t)=\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{t}{2},\quad F(t)=-\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2}+C,\quad C-const.$$

Найденное выражение для функции F подставляем в первое уравнение системы (4):

$$\Phi(-2y)-\tfrac{1}{2}\cos y+C=\cos y \;\Rightarrow\; \Phi(-2y)=\tfrac{3}{2}\cos y-C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Phi(t)=\tfrac{3}{2}\cos\tfrac{t}{2}-C.$$

Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y)=\tfrac{3}{2}\cos\frac{x-\cos y-2y}{2}-\tfrac{1}{2}\cos\frac{x-\cos y+2y}{2}.}$$

28.10.2022

Занятие № 9

Приведение уравнений к каноническому виду. Построение общего решения. Задача Коши.

Разбор примерного варианта контрольной работы

1. Укажите области на плоскости XOY, где сохраняется тип уравнения:

$$y\,u_{xx} - x(\cos\pi x + 1)u_{yy} + x\,u_x - u = 0$$

2. Решите задачу Коши:

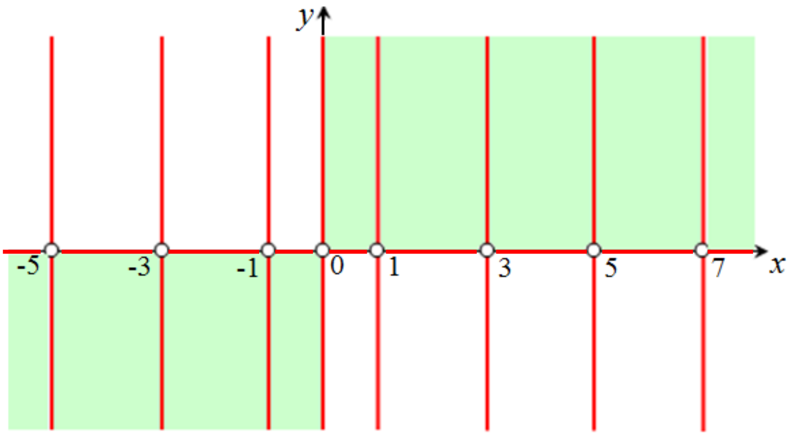
$$u_{xx} - 2\sin x\,u_{xy} - (4 - \sin^2 x)u_{yy} + 8u_x - (16 + 8\sin x + \cos x)u_y = 0,$$

$$u(x, \cos x) = e^{-6x} + 2x, \qquad u_y(x, \cos x) = 1 - e^{-6x}.$$

Задание 1. Область, в которой уравнение не является уравнением второго порядка, определяется условиями:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ \cos\pi x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \{(0,0), (2k+1, 0),\ k \in Z\}$$

Области		
параболичности	гиперболичности	эллиптичности
$xy(\cos\pi x + 1) = 0$	$xy(\cos\pi x + 1) > 0$	$xy(\cos\pi x + 1) < 0$
$\left[\begin{array}{l} x = 0,\quad y \neq 0 \\ y = 0,\quad x \neq 1 + 2k,\ k \in Z, \\ x = 1 + 2k,\quad k \in Z,\ y \neq 0 \end{array}\right.$	$\begin{cases} xy > 0, \\ x \neq 1 + 2k,\ k \in Z \end{cases}$	$\begin{cases} xy < 0, \\ x \neq 1 + 2k,\ k \in Z \end{cases}$



Задание 2

1. Определение типа уравнения:

   $d = \sin^2 x + 4 - \sin^2 x = 4 > 0 \;\Rightarrow\;$ уравнение имеет гиперболический тип.

2. Решение уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2\sin x dydx - (4 - \sin^2 x)(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (dy + \sin x dx)^2 - 4(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} dy + (\sin x + 2)dx = 0, \\ dy + (\sin x - 2)dx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - \cos x + 2x = C_1, \\ y - \cos x - 2x = C_2. \end{array}\right.$$

3. Переход к новым переменным:

$$\xi = y - \cos x + 2x, \quad \eta = y - \cos x - 2x, \quad u(x, y) \leftrightarrow v(\xi, \eta).$$
$$u(x, y) = v(y - \cos x + 2x, y - \cos x - 2x).$$

4. Выражение производных функции u через новые переменные:

$$\begin{array}{r|l} 8 & u_x = v_\xi(\sin x + 2) + v_\eta(\sin x - 2) \\ -16 - 8\sin x - \\ -\cos x & u_y = v_\xi + v_\eta \end{array}$$

1	$u_{xx}=(\sin x+2)^2 v_{\xi\xi}+2(\sin^2 x-4)v_{\xi\eta}+(\sin x-2)^2 v_{\eta\eta}+$ $+\cos x\cdot v_{\xi}+\cos x\cdot v_{\eta}$
$(\sin^2 x-4)$	$u_{yy}=v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}$
$-2\sin x$	$u_{xy}=(\sin x+2)v_{\xi\xi}+2\sin x\cdot v_{\xi\eta}+(\sin x-2)v_{\eta\eta}$

5. Построение канонического уравнения:

$v_{\xi\xi}$	$\sin^2 x-4+(\sin x+2)^2-2\sin x(\sin x+2)=0$
$v_{\eta\eta}$	$\sin^2 x-4+(\sin x-2)^2-2\sin x(\sin x-2)=0$
$v_{\xi\eta}$	$2(\sin^2 x-4)+2(\sin^2 x-4)-4\sin^2 x=-16$
v_{ξ}	$8\sin x+16-16-8\sin x=0$
v_{η}	$8\sin x-16-16-8\sin x=-32$

Канонический вид:

$$v_{\xi\eta}+2v_{\eta}=0$$

6. Общее решение уравнения (2):

$$v(\xi,\eta)=e^{-2\xi}\Phi(\eta)+F(\xi). \qquad (2)$$

7. Возвращаясь к старым переменным x, y, u, получим общее решение уравнения заданного уравнения:

$$u(x,y)=e^{-2(y-\cos x+2x)}\Phi(y-\cos x-2x)+F(y-\cos x+2x). \qquad (3)$$

8. Подставляя (3) в заданные условия:

$$u(x,\cos x)=e^{-6x}+2x,\quad u_y(x,\cos x)=1-e^{-6x},,$$

получим систему для нахождения функций F и Φ:

$$\begin{cases} e^{-4x}\Phi(-2x)+F(2x)=e^{-6x}+2x, \\ e^{-4x}\Phi'(-2x)-2e^{-4x}\Phi(-2x)+F'(2x)=1-e^{-6x}. \end{cases}$$

Выполнив в системе замену $t=2x$, будем иметь

$$\begin{cases} e^{-2t}\Phi(-t)+F(t)=e^{-3t}+t, \\ e^{-2t}\Phi'(-t)-2e^{-2t}\Phi(-t)+F'(t)=1-e^{-3t}. \end{cases} \qquad (4)$$

9. *Решение системы (методом подстановки)*

Дифференцируя первое уравнение системы (4), получим

$$e^{-2t}(-2\Phi(-t) - \Phi'(-t)) + F'(t) = -3e^{-3t} + 1 \;\Rightarrow$$
$$F'(t) = -3e^{-3t} + 1 + e^{-2t}(2\Phi(-t) + \Phi'(-t)).$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение системы (4), будем иметь

$$e^{-2t}\Phi'(-t) - 2e^{-2t}\Phi(-t) - 3e^{-3t} + 1 + e^{-2t}(2\Phi(-t) + \Phi'(-t)) = 1 - e^{-3t},$$

$$\Phi'(-t) = e^{-t}, \quad \Phi(t) = e^{t} + C, \quad C - const\,.$$

$F(t)$ найдем из первого уравнения системы (4):

$$F(t) = e^{-3t} + t - e^{-2t}\left(e^{-t} + C\right) = t - Ce^{-2t}.$$

10. Найденные выражения для функций F и Φ подставим в (3). В результате получим решение задачи Коши:

$$\boxed{u(x,y) = y - \cos x + 2x + e^{-y+\cos x-6x}}$$

Домашнее задание

Гл. 2, § 7, с. 86: № 40 (5а)

03.11.2022

Занятие № 10

Контрольная работа № 1.

Канонический вид уравнения в частных производных Метод характеристик. Задача Коши.