



Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

09.09.2022

**Занятие № 2. Уравнения в частных производных 1-го порядка.
Построение общего решения методом характеристик.**

Гл. 2, § 3, с. 64

№ 11:

Замечание о вычислении производных функции

$$u(x, y) = x + y + f(xy),$$

где $f(z)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция:

$$u_x(x, y) = 1 + f'(xy) \cdot y,$$

$$u_y(x, y) = 1 + f'(xy) \cdot x$$

№ 13 (1): Принимая ξ и η за новые переменные, преобразовать уравнение $xu_x + \sqrt{1+y^2} \cdot u_y = xy$, если $\xi = \ln x$, $\eta = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

Построим выражения для производных функции $u(x, y)$ при переходе к новым переменным $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = \frac{1}{x} v_\xi,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) v_\eta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} v_\eta.$$

Подставив выражения для производных в уравнение

$$xu_x + \sqrt{1+y^2} \cdot u_y = xy,$$

учитывая связь между старыми и новыми переменными:

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^\xi, \\ y = \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} = \operatorname{sh} \eta \end{cases}$$

получим: $v_\xi + v_\eta = e^\xi \operatorname{sh} \eta$.

Построение общего решения уравнений методом характеристик¹.

№ 14 (1). $yu_x - xu_y = 0$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

2) Решая уравнение характеристик методом разделения переменных, найдем его первый интеграл:

$$x^2 + y^2 = C.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$u(x, y) = F(x^2 + y^2),$$

где $F(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

№ 15 (1). $xu_x + yu_y + zu_z = 0$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}. \end{cases}$$

2) Решая уравнения характеристик, найдем два первых интеграла:

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{x}{z} = C_2.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

¹ http://math-it.petsru.ru/users/semenova/UMF/Lectons/Urav_Pp.pdf (Теорема 2).

$$u(x, y, z) = F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).$$

где $F(a, b)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для построения первых интегралов характеристической системы можно использовать *правило равных дробей*:

Если имеются равные дроби

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

и произвольные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такие, что $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \neq 0$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n}.$$

Пример построения первых интегралов для системы²:

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y}.$$

По свойству равных дробей имеем

$$\frac{dx - dz}{z - y} = \frac{dy - dz}{z - x} \Rightarrow (x - z)d(x - z) = (y - z)d(y - z).$$

Интегрируя последнее равенство, получим первый интеграл

$$\psi_1(x, y, z) = (x - z)^2 - (y - z)^2 = (x - y)(x + y - 2z).$$

По свойству равных дробей составим еще одно равенство

$$\frac{dx + dy + dz}{2(x + y + z)} = \frac{dx - dy}{x - y} \Leftrightarrow \frac{d(x + y + z)}{x + y + z} = \frac{2d(x - y)}{x - y},$$

интегрирование которого дает еще один первый интеграл

$$\psi_2(x, y, z) = \frac{x + y + z}{(x - y)^2}$$

² **Дифференциальные и интегральные уравнения:** учебное пособие для студентов физико-технического факультета: в 3 ч. Часть 2 / сост.: Н. Ю. Светова, Е. Е. Семёнова. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014, 76 с. (стр. 61).

Построить общее решение уравнения

$$(z - y)u_x + zu_y + yu_z = 0.$$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}, \\ \frac{dx}{z - y} = \frac{dy - dz}{z - y}. \end{cases}$$

Интегрируемая комбинация составлена с использованием правила равных дробей.

2) Решая уравнения характеристик, найдем два первых интеграла:

$$y^2 - z^2 = C_1, \quad x - y + z = C_2.$$

3) Общее решение заданного уравнения запишем в виде:

$$u(x, y, z) = F(y^2 - z^2, x - y + z).$$

где $F(a, b)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Гл. 2, § 3, с. 64: № 14 (5) $yu_x + xu_y = x^2 + y^2, \quad x \neq 0, y \neq 0.$

1) Составляем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Leftrightarrow xdx - ydy = 0.$$

2) Интегрируя уравнение характеристик, найдем его первый интеграл $x^2 - y^2 = C.$

3) Введем новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = x^2 - y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y \neq 0$, то преобразование является невырожденным.

Для $u(x, y) = v(\xi(x, y), \eta(x, y))$ найдем:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = 2xv_\xi + v_\eta,$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y = -2yv_\xi.$$

После подстановки найденных выражений в заданное уравнение получим:

$$yv_{\eta} = x^2 + y^2 \rightarrow v_{\eta} = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

4) Выразим правую часть уравнения через новые переменные. Так как

$$x = \eta, \quad y^2 = \eta^2 - \xi,$$

то

$$v_{\eta} = \begin{cases} \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}}, & \text{когда } y > 0, \\ \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}}, & \text{когда } y < 0. \end{cases}$$

5) Интегрируя полученное уравнение, найдем его общее решение:

А) когда $y > 0$ (при этом $y = \sqrt{\eta^2 - \xi}$),

$$\begin{aligned} v_{\eta} = \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}} &\rightarrow v = \int \frac{2\eta^2 - \xi}{\sqrt{\eta^2 - \xi}} d\eta + C(\xi) \rightarrow \\ &\rightarrow v = \eta\sqrt{\eta^2 - \xi} + C(\xi); \end{aligned}$$

Б) когда $y < 0$ (при этом $y = -\sqrt{\eta^2 - \xi}$),

$$\begin{aligned} v_{\eta} = \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}} &\rightarrow v = \int \frac{2\eta^2 - \xi}{-\sqrt{\eta^2 - \xi}} d\eta + C(\xi) \rightarrow \\ &\rightarrow v = -\eta\sqrt{\eta^2 - \xi} + C(\xi); \end{aligned}$$

где $C(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция.

6) Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x, y) = xy + C(x^2 - y^2).$$

Заметим, что слагаемое xy является частным решением неоднородного уравнения, а второе слагаемое – общим решением соответствующего однородного уравнения.



Домашнее задание

С. 64-65: №№ 12, 13 (2).

Рассмотреть примерный вариант [самостоятельной работы № 1](#).

16.09.2022

Занятие № 3. Уравнения в частных производных 1-го порядка. Построение общего решения. Задача Коши

Гл. 2, § 3, с. 64-65

№ 14 (5). $yu_x + xu_y = x^2 + y^2$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{x^2 + y^2}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1.$$

3) Для нахождения еще одного первого интеграла, составим интегрируемую комбинацию, используя правило равных дробей:

$$\frac{ydx + xdy}{y^2 + x^2} = \frac{du}{x^2 + y^2} \Rightarrow du - d(xy) = 0 \Rightarrow u - xy = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x, y)$:

$$\Phi(x^2 - y^2, u - xy) = 0.$$

5) Из уравнения можно получить явное выражение для $u(x, y)$:

$$u - xy = F(x^2 - y^2) \Rightarrow u(x, y) = xy + F(x^2 - y^2).$$

Заметим, что слагаемое xy является частным решением неоднородного уравнения, а второе слагаемое – общим решением соответствующего однородного уравнения.

№ 14 (6). $xu_x + (x - 2u)u_y = u$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2u} = \frac{du}{yu}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{du}{yu} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{x} = C_1.$$

3) Вторым первым интегралом можно найти, решая систему:

$$\begin{cases} u = C_1 x, \\ \frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ \frac{dx}{yx} = \frac{dy}{x(1-2C_1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ (1-2C_1)dx = ydy \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = C_1 x, \\ 2(1-2C_1)x - y^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow 2x - 4u - y^2 = C_2.$$

Замечание. Для нахождения еще одного первого интеграла можно было составить интегрируемую комбинацию, используя правило равных дробей:

$$\frac{dx - ydy}{xy - (xy - 2yu)} = \frac{2du}{2yu} \Rightarrow$$

$$dx - ydy - 2du = 0 \Rightarrow 2x - y^2 - 4u = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\Phi\left(\frac{u}{x}, 2x - y^2 - 4u\right) = 0.$$

Решение заданного уравнения получено **в неявной форме**.

№ 14 (7). $\frac{1}{x}u_x + \frac{1}{y}u_y = \frac{u}{y^2}$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$xdx = ydy = \frac{y^2 du}{u}.$$

2) Один первый интеграл системы найдем, решая уравнение:

$$xdx = ydy \Rightarrow x^2 - y^2 = C_1.$$

3) Второй первый интеграл найдем, решая уравнение:

$$ydy = \frac{y^2 du}{u} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{y} = C_2.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y)$:

$$\Phi\left(x^2 - y^2, \frac{u}{x}\right) = 0 \Rightarrow u(x, y) = yF(x^2 - y^2).$$

№ 15 (3). $x^2 u_x + y^2 u_y + z^2 u_z = u$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u}.$$

2) Найдем три первых интеграла, решая уравнения:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C_1,$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = C_2,$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du}{u} \Rightarrow u \cdot e^{1/x} = C_3.$$

3) Составим уравнение для нахождения функции $u(x,y,z)$:

$$\Phi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z}, u \cdot e^{1/x}\right) = 0,$$

разрешая которое относительно u , получим:

$$u(x, y, z) = e^{-1/x} F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$$

№ 15 (4). $u_x + 2u_y + u_z = xyz$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$dx = \frac{dy}{2} = dz = \frac{du}{xyz}.$$

2) Найдем три первых интеграла, решая уравнения:

$$dx = \frac{dy}{2} \Rightarrow 2x - y = C_1,$$

$$dx = dz \Rightarrow x - z = C_2.$$

3) Из уравнения $dx = \frac{du}{xyz}$ исключим переменные y, z , используя два первых интеграла в п. 2. Получим

$$dx = \frac{du}{x(2x - C_1)(x - C_2)} \Rightarrow x(2x - C_1)(x - C_2)dx = du.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, будем иметь

$$u - \frac{x^4}{2} + (2C_2 + C_1)\frac{x^3}{3} - C_1C_2\frac{x^2}{2} = C_3.$$

Из последнего равенства, исключив C_1 и C_2 , найдем еще один первый интеграл:

$$u - \phi(x, y, z) = C_3,$$

$$\text{где } \phi(x, y, z) = \frac{x^4}{2} - (4x - y - 2z)\frac{x^3}{3} + (x - z)(2x - y)\frac{x^2}{2}.$$

4) Составим уравнение для нахождения функции $u(x, y, z)$:

$$\Phi(x - z, y - 2z, u - \phi(x, y, z)) = 0,$$

разрешая которое относительно u , получим:

$$u(x, y, z) = F(x - z, y - 2z) + \phi(x, y, z).$$

Дополнение к № 13(1). Построить общее решение уравнения:

$$v_\xi + v_\eta = e^\xi \operatorname{sh} \eta.$$

Применить метод решения квазилинейных уравнений:

1) построить два независимых первых интеграла для характеристической системы:

$$\begin{cases} d\xi = d\eta, \\ d\eta = \frac{dv}{e^\xi \operatorname{sh} \eta}. \end{cases}$$

$$\text{Первые интегралы: } \xi - \eta = C_1, \quad \frac{e^{\xi - \eta}(e^{2\eta} - 2\eta)}{4} - v = C_2.$$

2) составить уравнение для нахождения v :

$$\Phi\left(\xi - \eta, \frac{e^{\xi - \eta}(e^{2\eta} - 2\eta)}{4} - v\right) = 0 \quad (*)$$

3) разрешить уравнение (*) относительно v :

$$v(\xi, \eta) = \frac{e^{\xi - \eta}(e^{2\eta} - 2\eta)}{4} - F(\xi - \eta).$$

№ 17 (1): $xu_x + yu_y = 1, \quad u(x, 1) = x.$

1) Составляем систему уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = du.$$

2) Решая систему, найдем два независимых первых интеграла:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1;$$

$$\frac{dy}{y} = du \Rightarrow u - \ln|y| = C_2.$$

3) Составим уравнение для нахождения функции $u(x, y)$:

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, u - \ln|y|\right) = 0.$$

4) Из полученного уравнения найдем: $u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right) + \ln|y|$

Задача Коши. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Для нахождения функции F используем условие $u(x, 1) = x$:

$$u(x, 1) = F(x) = x.$$

Решение задачи Коши: $u(x, y) = \frac{x}{y} + \ln|y|.$



Домашнее задание

С. 64-65: №№ 14 (3,4), 15 (2), 17 (2).

23.09.2022

**Занятие № 4. Уравнения в частных производных 1-го порядка.
Построение общего решения. Задача Коши**

Гл. 2, § 3, с. 65

№ 17 (3): $xu_x + yu_y = 2xy, \quad u(x, x) = x^2.$

Задача Коши. Выделяем частное решение из общего, используя заданные условия.

Общее решение: $u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right) + xy$

Для нахождения функции F используем условие $u(x, x) = x$:

$$u(x, x) = F(1) + x^2 = x^2 \Rightarrow F(1) = 0.$$

Решение задачи Коши: $u(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right) + xy$, где F – произвольная дифференцируемая функция, для которой $F(1) = 0$.

№ 17 (6): $x^2u_x - xyu_y = -y^2, \quad u(x, x) = 1 + \frac{x}{3}.$

1) Характеристическая система:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{du}{-y^2}$$

2) Первые интегралы характеристической системы:

$$xy = C_1, \quad u - \frac{y^2}{3x} = C_2.$$

3) Общее решение: $u(x, y) = \frac{y^2}{3x} + F(xy).$

4) Частное решение:

$$u(x, x) = \frac{x}{3} + F(x^2) = 1 + \frac{x}{3} \Rightarrow F(t) = 1,$$

$$u(x, y) = \frac{y^2}{3x} + 1.$$

№ 17 (7): $xu_x + yu_y = u - xy$, $u(x, 2) = 1 + x^2$.

1) Характеристическая система:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy}$$

2) Первые интегралы характеристической системы:

a) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, $\frac{x}{y} = C_1$.

b) Решая уравнение:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u - xy},$$

при условии $x = yC_1$:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{y} - C_1 y, \quad u = C_2 y - C_1 y^2 = C_2 y - xy,$$

найдем еще один первый интеграл:

$$\frac{u + xy}{y} = C_2.$$

3) Общее решение: $u(x, y) = yF\left(\frac{x}{y}\right) - xy$.

4) Частное решение:

$$u(x, 2) = 2F\left(\frac{x}{2}\right) - 2x = 1 + x^2 \Rightarrow F\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{(x+1)^2}{2}, \quad F(t) = \frac{(2t+1)^2}{2}.$$

$$u(x, y) = y \cdot \frac{\left(\frac{2x}{y} + 1\right)^2}{2} - xy = \frac{(2x+y)^2}{2y} - xy.$$



Домашнее задание

С. 65: №№ 17 (5), 19.

Подготовка к самостоятельной работе (30.09.22) по теме: «Простейшие уравнения в частных производных. Метод характеристик».

Пример варианта:

Найдите общее решение уравнений:

1) $xu_{xy} - u_y = x + y,$

2) $(1 - x^2)u_x - u_y = 2x.$

Самостоятельная работа № 1 (часть 2).

[Варианты заданий](#)

Срок выполнения – **31.10.22**

Разобрать самостоятельно:

№ 18 (1): $xu_x + yu_y + zu_z = 0, \quad u(1, y, z) = y^2 + z^2.$

1) Общее решение уравнения (см. [№ 15\(1\)](#)):

$$u(x, y, z) = F\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right)$$

2) Выделение частного решения (решение задачи Коши):

$$u(1, y, z) = F\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = y^2 + z^2 \Rightarrow F(y, z) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Следовательно,

$$u(x, y, z) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2, \quad u(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{x^2}.$$

№ 18 (2): $u_x + u_y + u_z = xyz, \quad u(0, y, z) = y - z.$

1) Общее решение уравнения (см. [№ 15\(2\)](#)):

$$u(x, y, z) = \frac{x^4}{4} - \frac{(2x - y - z)^2 x^3}{3} + \frac{(x - y)(x - z)x^2}{2} + F(x - y, x - z).$$

2) Выделение частного решения (решение задачи Коши):

$$u(0, y, z) = F(-y, -z) = y - z \Rightarrow F(y, z) = z - y.$$

Следовательно,

$$u(x, y, z) = \frac{x^4}{4} - \frac{(2x - y - z)^2 x^3}{3} + \frac{(x - y)(x - z)x^2}{2} + y - z.$$
