



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---

**8.04.2022**

## **Занятие № 9**

### **I. Простейшие краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона**

Уравнение Лапласа:  $\Delta u = 0$ ,

Уравнение Пуассона:  $\Delta u = F(M)$

1)  $u = u(x, y), \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

2)  $u = u(r, \varphi), \quad \Delta u = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

3)  $u = u(r), \quad \Delta u = u''(r) + \frac{1}{r} u'(r).$

Гл. 4, § 1, 2

С. 106, № 2,

2. Покажите, что функция  $u(r) = \ln \frac{1}{r}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ , является гармонической на всей плоскости, исключая точку в начале координат, которой соответствует  $r = 0$ .

С. 108, № 7 (1, 3, 4)

7. Внутри кольца  $a < r < b$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  найти решение  $u(r)$  краевых задач:

1)  $\Delta u(r) = 0, \quad u(a) = T, \quad u(b) = U;$

$$3) \quad \Delta u(r) = 0, \quad u_r(a) = T, \quad u_r(b) = U;$$

$$4) \quad \Delta u(r) = 0, \quad u(a) = T, \quad u_r(b) + hu(b) = U;$$

Здесь  $T, U$  – заданные постоянные.

### С. 108, № 8 (1)

8. Пусть  $u(r)$  – гармоническая функция в кольце  $K : a < r < b, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 < a < b < \infty$ , непрерывная в  $\bar{K}$ .

$$1) \quad \text{Чему равно } u(a), \text{ если } u(c) = T, \quad u_r(b) + hu(b) = W.$$

Здесь  $a < c < b, a < d < b$  и  $T, T_0, U, W$  – заданные постоянные.

### С. 108, № 10 (1)

10. Пусть  $u(r)$  – решение уравнения Пуассона  $\Delta u(r) = \frac{1}{r}$ , в кольце  $K : a^2 < x^2 + y^2 = r^2 < b^2$ , непрерывное в  $\bar{K}$ .

Определить значения:

$$1) \quad u(a), \quad \text{если } u(b) = T_0, \quad u(c) = T;$$

Здесь  $a < c < b, a < d < b$ , а  $T_0, T, U$  – заданные постоянные.



### Домашнее задание

Глава IV. § 1,2, с. 106-108: № 3, 7 (2, 5), 8 (2), 10 (2).