Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

13.05.2022

Занятие № 14. Краевые задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

№ 1. Решить задачу о распространении тепла в прямоугольнике:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad 0 \le x \le l_1, \quad 0 \le y \le l_2 \tag{2}$$

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = 0, \quad 0 \le y \le l_2, \quad t \ge 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0, \quad 0 \le x \le l_1, \quad t \ge 0, \tag{4}$$

Условия согласования начального и граничных условий:

$$\varphi(0,0) = \varphi(l_1, 0) = \varphi(0, l_2) = \varphi(l_1, l_2) = 0.$$

Будем искать ненулевое решение задачи (1)–(4) в виде

$$u(x, t) = T(t)X(x)Y(y) \tag{5}$$

Подставив (5) в (1), после разделения переменных получим:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Отсюда в силу независимости переменных x, y и t будем иметь:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l_1, \tag{6_1}$$

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0, \quad 0 < y < l_2, \tag{7$_1$}$$

$$T'\,t) + cT(t) = 0, \quad t > 0. \tag{8}$$

где λ, μ и с – постоянные параметры, которые подлежат определению, причем с = λ + μ.

Подставив (5) в (3) и (4), получим:

$$X(0) = X(l_1) = 0, \tag{6$_2$}$$

$$Y(0) = Y(l_2) = 0 \tag{7$_2$}$$

соответственно.

В результате получили две одномерные задачи Штурма-Лиувилля (6) и (7), которые имеют следующие решения:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l_1}, \quad k = 1,2,....,$$

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{l_2}, \quad n = 1,2,.....$$

Для каждого значения параметра c, равного

$$c_{kn} = \lambda_k + \mu_n = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2, \quad k,\ n = 1,2,... \tag{8}$$

построим общее решение уравнения (8):

$$T_{kn}(t) = A_{kn}\exp\left(-c_{kn}a^2 t\right).$$

Составляя линейную комбинацию всех частных решений уравнения (1) вида (5), получим общее решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3) и (4:

$$u(x,y,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_k(x) Y_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} e^{-c_{kn}a^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}. \qquad (9)$$

Константы A_{kn} найдем, подчинив построенный ряд начальному условию (2):

$$u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2} = \varphi(x,y).$$

Отсюда будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{kn} \sin\frac{k\pi x}{l_1} = \frac{2}{l_2}\int_0^{l_2} \phi(x,\eta)\sin\frac{n\pi\eta}{l_2}\, d\eta, \quad n = 1,2,,,,.$$

$$A_{kn} = \frac{2}{l_1}\int_0^{l_1}\left(\frac{2}{l_2}\int_0^{l_2}\phi(x,\eta)\sin\frac{n\pi\eta}{l_2}d\eta\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l_2}d\xi =$$

$$= \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\phi(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\eta}{l_2}\sin\frac{k\pi\xi}{l_1}d\eta d\xi, \quad k,n = 1,2,..., \qquad (10)$$

Таким образом, получено решение краевой задачи (1)-(4) в виде ряда (9), в котором коэффициенты c_{kn} и A_{kn} определяются по формулам (8) и (10).

Замечание. Если $\varphi(x,y) = \sin\frac{2\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}$, то $A_{kn} = \begin{cases} 1, & k = 2,\ n = 1 \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$

Дополнение к решению задачи № 1

Обозначим:

$$M = (x,y), \quad M = (\xi,\eta), \quad v_{kn}(M) = \sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}, \quad k,n = 1,2,\dots .$$

После подстановки формул (10) в (9) решение задачи (1)–(4) можно записать в виде:

$$u(M,t)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(M)G(M,M,t)d\xi d\eta, \tag{11}$$

где функция $G(M,M,t)$ определяется следующим образом

$$G(M,M,t)=\frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-c_{kn}a^2t}v_{kn}(M)v_{kn}(M), \tag{12}$$

и является **функцией Грина** рассматриваемой краевой задачи.

Функции $v_{kn}(M)$ являются ненулевыми решениями краевой задачи с параметром c в прямоугольнике:

$$\begin{cases}\Delta v-cv=0, \quad 0<x<l_1, \quad 0<y<l_2,\\ v(0,y)=v(l_1,y)=0, \quad 0\le y\le l_2,\\ v(x,0)=v(x,l_2)=0, \quad 0\le x\le l_1,\\ \Delta v=v_{xx}+v_{yy}.\end{cases} \tag{13}$$

Задача (13) – **задача на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике с граничными условиями Дирихле** (1-го рода). Т.е. $v_{kn}(M)$ – собственные функции, соответствующие собственным значениям c_{kn}. Надо заметить, что функция $v_{kn}(M)$ является произведением функций $X_k(x)$ и $Y_n(y)$, которые являются решениями задач Штурма–Лиувилля (6_1)–(6_2) и (7_1)–(7_2), причем собственные значения задачи (13) есть сумма собственных значений одномерных задач

$$c_{kn}=\lambda_k+\mu_n=\left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l_2}\right)^2, \quad k, \quad n=1,2,...,$$

и

$$\|v_{kn}\|^2=\|X_k\|^2\cdot\|Y_n\|^2=\frac{4}{l_1l_2}, \quad k, \quad n=1,2,... .$$

№ 2. Решить задачу о распространении тепла в прямоугольнике:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ \ t > 0, \qquad (14)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \ \ 0 \le x \le l_1, \ \ 0 \le y \le l_2 \qquad (15)$$

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = 0, \quad 0 \le y \le l_2, \quad t \ge 0, \qquad (16)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0, \ \ 0 \le x \le l_1, \ \ t \ge 0, \qquad (17)$$

1 способ. Будем искать решение в виде ряда по собственным:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}. \qquad (18)$$

После подстановки ряда (18) в уравнение (14) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{kn}^{'}(t) + a^2 c_{kn} T_{kn}(t)\right)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2} = f(x, y, t),$$

где $c_{kn} = \left(\dfrac{k\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{l_2}\right)^2, \quad k,\ n = 1,2,...$

Ряд в левой части уравнения является разложением функции $f(x,y,t)$ в ряд по собственным. И, следовательно,

$$T_{kn}^{'}(t) + a^2 c_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \ \ k, n = 1,2,..., \ \ t > 0, \qquad (19)$$

где $f_{kn}(t)$ – коэффициенты разложения функции $f(x,y,t)$:

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi, \eta, t)\sin\frac{n\pi\eta}{l_2}\sin\frac{k\pi\xi}{l_1}\,d\eta\, d\xi, \quad k, n = 1, 2, ... \qquad (20)$$

Подстановка ряда (5) в начальное условие (15) дает

$$u(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}T_{kn}(0)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}=0.$$

Отсюда получим

$$T_{kn}(0)=0,\ \ k,n=1,2,... \qquad (21)$$

Решив задачи Коши (19)-(20), найдем функции $T_{kn}(t)$):

$$T_{kn}(t)=\int_0^t f_{kn}(\tau)e^{-c_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau.$$

Подставив эти выражения в ряд (18), с учетом формул (20) получим решение задачи (14)–(17):

$$u(x,y,t)=\frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-c_{kn}a^2(t-\tau)}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta,t)\sin\frac{n\pi\eta}{l_2}\sin\frac{k\pi\xi}{l_1}d\eta d\xi d\tau\right)\times$$
$$\times\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}.$$

Полученное выражение можно представить с помощью функции Грина, определяемой формулой (12):

$$u(M,t)=\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(M,\tau)G(M,M,t-\tau)d\xi d\eta d\tau. \qquad (21)$$

2 способ. Введем функцию $w(x,y,t,\tau)$, которая является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} w_t=a^2(w_{xx}+w_{yy}), & 0<x<l_1,\ \ 0<y<l_2,\ \ t>\tau,\\ w(x,y,\tau,\tau)=f(x,y,\tau), & 0\le x\le l_1,\ \ 0\le y\le l_2,\\ w(0,y,t,\tau)=w(l_1,y,t,\tau)=0, & 0\le y\le l_2,\ \ t\ge\tau,\\ w(x,0,t,\tau)=w(x,l_2,t,\tau)=0, & 0\le x\le l_1,\ \ t\ge\tau. \end{cases} \qquad (22)$$

Можно показать, что интеграл

$$u(x,y,t)=\int_0^t w(x,y,t,\tau)d\tau. \qquad (23)$$

является решением задачи (14)-(17).

Зная, что решение задачи (22) представимо с помощью функции Грина:

$$w(M,t,\tau)=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(M,\tau)G(M,M,t-\tau)d\xi d\eta,$$

то, подставляя это выражением в (23), получим решение задачи (14)-(17) в виде (21).

Домашнее задание

Решить задачу о распространении тепла в прямоугольном параллелепипеде:

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\qquad 0<x<l_1,\ \ 0<y<l_2,\ \ 0<z<l_3\quad t>0,$$

$$u(x,y,z,0)=\phi(x,y,z),\quad 0\le x\le l_1,\quad 0\le y\le l_2,\quad 0\le z\le l_3,$$

$$u(0,y,z,t)=u(l_1,y,z,t)=0,\quad 0\le y\le l_2,\quad 0\le z\le l_3,\quad t\ge 0,$$

$$u(x,0,z,t)=u(x,l_2,z,t)=0,\quad 0\le x\le l_1,\quad 0\le z\le l_3,\quad t\ge 0,$$

$$u(x,y,0,t)=u(x,y,l_3,t)=0,\quad 0\le x\le l_1,\quad 0\le y\le l_2,\quad t\ge 0.$$