Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

10.09.2021

Занятие № 1. Простейшие уравнения в частных производных. Общее решение

С. 54: № 4.

Найдите производную u'_x функции $u(x,y) = x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

$$u'_x = y \cdot \left(\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \right)'_x = y \cdot \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - x(x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

С. 55: № 6 (1-10). Построить общее решение $u = u(x,y)$ уравнений.

1) $u_x = 0 \ \to \ u(x,y) = \Phi(y),$ где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.

2) $u_x = f(y) \ \to \ u(x,y) = \int f(y)dx + \Phi(y) = xf(y) + \Phi(y),$ где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.

3) $u_x = f(x) \ \to \ u(x,y) = \int f(x)dx + \Phi(y),$ где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.

4) $u_x = f(x,y) \ \to \ u(x,y) = \int f(x,y)dx + \Phi(y),$ где $\Phi(y)$ - произвольная непрерывная функция.

5) $u_{xx}=0 \;\to\; u_x=\Phi(y) \;\to\; u(x,y)=x\Phi(y)+\Psi(y),$ где $\Phi(y),\Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.

6) $u_{xx}=f(x) \;\to\; u_x=\int f(x)dx+\Phi(y) \;\to$
$\to u(x,y)=\int\int f(x)dxdx+x\Phi(y)+\Psi(y),$ где $\Phi(y),\Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.

7) $u_{xx}=f(y) \;\to\; u_x=xf(y)+\Phi(y) \;\to$
$u(x,y)=\dfrac{x^2 f(y)}{2}+x\Phi(y)+\Psi(y),$ где $\Phi(y),\Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.

8) $u_{xx}=f(x,y) \;\to\; u_x=\int f(x,y)dx+\Phi(y) \;\to$
$\to u(x,y)=\int\int f(x,y)dxdx+x\Phi(y)+\Psi(y),$ где $\Phi(y),\Psi(y)$ - произвольные непрерывные функции.

9) $u_{xy}=0 \;\to\; u_x=\Phi(x) \;\to\; u(x,y)=\int\Phi(x)dx+\Psi(y)=$
$=G(x)+\Psi(y),$ где $G(x),\Psi(y)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

10) $u_{xy}=f(x) \;\to\; u_x=\int f(x)dy+\Phi(x)=yf(x)+\Phi(x) \;\to$
$u(x,y)=y\int f(x)dx+\int\Phi(x)dx+\Psi(y)=y\int f(x)dx+G(x)+\Psi(y),$
где $G(x),\Psi(y)$ - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Вывод: *общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Количество произвольных величин (функций) совпадает с порядком уравнения.*

№ 7 (1): $xu_{xy}+u_y=0$

1 способ (понижение порядка уравнения с помощью замены).

1) При $x\neq 0$ имеем

$$xu_{xy}+u_y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=u_y, \\ xv_x+v=0. \end{cases} \tag{1}$$

2) Построим общее решение уравнения

$$xv_x+v=0 \tag{2}$$

методом разделения переменных, рассматривая уравнение (2) как «обыкновенное дифференциальное уравнение», в котором переменную y считаем параметром):

$$\frac{\partial v}{v}=-\frac{\partial x}{x}, \qquad \ln|v|=-\ln|x|+\ln|C_1(y)|, \quad v(x,y)=\frac{C_1(y)}{x}.$$

Замечание. Общее решение уравнения (2) можно построить и таким образом:

$$xv_x+v=0, \qquad \left(xv\right)'_x=0, \qquad xv=C_1(y), \quad v(x,y)=\frac{C_1(y)}{x}.$$

3) Подставив найденное для v выражение в 1-е уравнение системы (1), получим уравнение:

$$u_y=\frac{C_1(y)}{x},$$

интегрируя которое по y, найдем

$$u(x,y)=\frac{C_2(y)}{x}+C_3(x).$$

где $C_2(y)$ и $C_3(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

2 способ

Если $x\neq 0$:

$$xu_{xy} + u_y = 0, \quad (xu_y)'_x = 0, \quad xu_y = C(y),$$

$$u_y = \frac{C(y)}{x}, \quad u(x,y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x},$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

4) Если $x = 0$, то для заданного уравнения будем иметь:

$$u_y(0,y) = 0, \quad u(0,y) = C = const.$$

Ответ: $\boxed{u(x,y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x}, \quad x \neq 0.}$

с. 55, **№ 7 (5):** $u_{xy} + \frac{1}{6}u_x = 0$

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_y + \frac{1}{6}v = 0 \end{cases}$$

$$v(x,y) = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u_x = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u(x,y) = e^{-\frac{1}{6}y}\int C(x)dx + C_1(y),$$

$u(x,y) = e^{-\frac{1}{6}y}C_2(x) + C_1(y)$, где $C_1(y)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

№ 7 (3): $u_{xy} + 5u_x = xy^2$

<u>Этапы решения</u>:

1) $u_{xy} + 5u_x = xy^2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5v = xy^2. \end{cases}$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5v = xy^2$ (*):

A) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5v = 0$: $v(x,y) = e^{-5y}C(x)$, где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{част}(x,y)=A(x)y^2+B(x)y+D(x).$$

5	$v_{част}(x,y)=A(x)y^2+B(x)y+D(x)$
1	$\left(v_{част}\right)'_y=2yA(x)+B(x)$

$y^2:$	$5A(x)=x,$	$\Rightarrow \begin{cases} A(x)=x/5, \\ B(x)=-2x/25, \\ D(x)=2x/125. \end{cases}$
$y:$	$5B(x)+2A(x)=0,$	
$y^0:$	$5D(x)+B(x)=0.$	

Результат: $v_{част}(x,y)=\dfrac{x}{5}\left(y^2-\dfrac{2}{5}y+\dfrac{2}{25}\right).$

В) общее решение:

$$v(x,y)=e^{-5y}C(x)+\frac{x}{5}\left(y^2-\frac{2}{5}y+\frac{2}{25}\right).$$

Замечание. Общее решение уравнения (*) может быть построено методом вариации:

Решение неоднородного уравнения (*) будем искать в виде

$$v(x,y)=C(x,y)e^{-5y}. \qquad (1)$$

Подставляя (1) в (*), получим

$$C'_y(x,y)e^{-5y}-5C(x,y)e^{-5y}+5C(x,y)e^{-5y}=xy^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C'_y(x,y)=xy^2e^{5y}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$C(x,y)=\frac{x}{125}e^{5y}(25y^2-10y+2)+\tilde{C}(x). \qquad (2)$$

$$\int x\cdot y^2\cdot e^{5y}\,dy \text{ simplify } \to \frac{x\cdot e^{5\cdot y}\cdot(25\cdot y^2-10\cdot y+2)}{125}$$

Подставляя (2) в (1), получим общее решение уравнения (*):

$$v(x,y)=\frac{x}{125}(25y^2-10y+2)+\tilde{C}(x)e^{-5y}.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x=v(x,y)$:

$u(x,y)=e^{-5y}C_1(x)+\frac{x^2}{10}\left(y^2-\frac{2}{5}y+\frac{2}{25}\right)+C_2(y)$, где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Ответ: $\boxed{u(x,y)=e^{-5y}C_1(x)+\frac{x^2}{10}\left(y^2-\frac{2}{5}y+\frac{2}{25}\right)+C_2(y).}$

Домашнее задание

С. 54-55: № 6 (11, 12),

С. 55: №№ 7 (2,4,6,8).

17.09.2021

Занятие № 2. Простейшие уравнения в частных производных. Общее решение

с. 55, **№ 7 (7):** $u_{yy}+\frac{1}{y}u_y=0$

Так как $y\neq 0$, то

$$u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0, \quad yu_{yy} + u_y = 0, \quad \left(yu_y\right)_y = 0, \quad yu_y = C_1(x), \quad u_y = \frac{C_1(x)}{y},$$

$u(x, y) = C_1(x)\ln|y| + C_2(x),$ где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Построить общее решение уравнения: $u_{xy} + 5xu_x = x + y.$

Этапы решения:

1) $u_{xy} + 5xu_x = x + y \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5xv = x + y. \end{cases}$

2) Построение общего решения уравнения $v_y + 5xv = x + y$ (*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения $v_y + 5xv = 0$: $v(x, y) = e^{-5yx}C(x),$ где $C(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{част}(x, y) = A(x)y + B(x).$$

Результат: $v_{част}(x, y) = \dfrac{y}{5x} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5yx}C(x) + \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$$

3) Построение общего решения уравнения $u_x = v(x, y)$:

$$u(x, y) = \int C(x)e^{-5xy}dx + \frac{y\ln|x|}{5} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25x} + C_1(y), \quad x \neq 0,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные дифференцируемые функции.

Замечание. Если x = 0, то для уравнения (*) имеем:

$$v_y(0, y) = y \quad \Rightarrow \quad v(0, y) = \frac{y^2}{2} + C,\ C -$$ произвольная константа.

Возвращаясь к замене, получим уравнение:

$$u_x(0, y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Из него решение заданного уравнения при x = 0 путем интегрирования по x нельзя.

Домашнее задание

Решите уравнение: $u_{xy} + xyu_x = y, \quad u = u(x, y).$