



**Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений** / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

---

**4.09.2020**

**Занятие № 1. Простейшие уравнения в частных производных.  
Общее решение**

**С. 54: № 4.**

Найдите производную  $u'_x$  функции  $u(x, y) = x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

$$\begin{aligned}u'_x &= y \cdot \left( \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \right)'_x = y \cdot \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - x(x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

**С. 55: № 6 (1-10).** Построить общее решение  $u = u(x, y)$  уравнений.

- 1)  $u_x = 0 \rightarrow u(x, y) = \Phi(y)$ , где  $\Phi(y)$  - произвольная непрерывная функция.
- 2)  $u_x = f(y) \rightarrow u(x, y) = \int f(y)dx + \Phi(y) = xf(y) + \Phi(y)$ , где  $\Phi(y)$  - произвольная непрерывная функция.
- 3)  $u_x = f(x) \rightarrow u(x, y) = \int f(x)dx + \Phi(y)$ , где  $\Phi(y)$  - произвольная непрерывная функция.
- 4)  $u_x = f(x, y) \rightarrow u(x, y) = \int f(x, y)dx + \Phi(y)$ , где  $\Phi(y)$  - произвольная непрерывная функция.

- 5)  $u_{xx} = 0 \rightarrow u_x = \Phi(y) \rightarrow u(x, y) = x\Phi(y) + \Psi(y)$ , где  $\Phi(y), \Psi(y)$  - произвольные непрерывные функции.
- 6)  $u_{xx} = f(x) \rightarrow u_x = \int f(x)dx + \Phi(y) \rightarrow$   
 $\rightarrow u(x, y) = \iint f(x)dx dx + x\Phi(y) + \Psi(y)$ , где  $\Phi(y), \Psi(y)$  - произвольные непрерывные функции.
- 7)  $u_{xx} = f(y) \rightarrow u_x = xf(y) + \Phi(y) \rightarrow$   
 $u(x, y) = \frac{x^2 f(y)}{2} + x\Phi(y) + \Psi(y)$ , где  $\Phi(y), \Psi(y)$  - произвольные непрерывные функции.
- 8)  $u_{xx} = f(x, y) \rightarrow u_x = \int f(x, y)dx + \Phi(y) \rightarrow$   
 $\rightarrow u(x, y) = \iint f(x, y)dx dx + x\Phi(y) + \Psi(y)$ , где  $\Phi(y), \Psi(y)$  - произвольные непрерывные функции.
- 9)  $u_{xy} = 0 \rightarrow u_x = \Phi(x) \rightarrow u(x, y) = \int \Phi(x)dx + \Psi(y) =$   
 $= G(x) + \Psi(y)$ , где  $G(x), \Psi(y)$  - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.
- 10)  $u_{xy} = f(x) \rightarrow u_x = \int f(x)dy + \Phi(x) = yf(x) + \Phi(x) \rightarrow$   
 $u(x, y) = y \int f(x)dx + \int \Phi(x)dx + \Psi(y) = y \int f(x)dx + G(x) + \Psi(y)$ ,  
где  $G(x), \Psi(y)$  - произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

**Вывод:** общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Количество произвольных величин (функций) совпадает с порядком уравнения.



## Домашнее задание

С. 54-55: № 6 (11, 12).

Повторить: *решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом вариации.*

**11.09.2020**

### Занятие № 2. Простейшие уравнения в частных производных.

#### Общее решение

**№ 7 (1):**  $xu_{xy} + u_y = 0$

1 способ (понижение порядка уравнения с помощью замены).

1) При  $x \neq 0$  имеем

$$xu_{xy} + u_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_y, \\ xv_x + v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2) Построим общее решение уравнения

$$xv_x + v = 0 \quad (2)$$

методом разделения переменных, рассматривая уравнение (2) как «обыкновенное дифференциальное уравнение», в котором переменную  $y$  считаем параметром):

$$\frac{\partial v}{v} = -\frac{\partial x}{x}, \quad \ln |v| = -\ln |x| + \ln |C_1(y)|, \quad v(x, y) = \frac{C_1(y)}{x}.$$

Замечание. Общее решение уравнения (2) можно построить и таким образом:

$$xv_x + v = 0, \quad (xv)'_x = 0, \quad xv = C_1(y), \quad v(x, y) = \frac{C_1(y)}{x}.$$

3) Подставив найденное для  $v$  выражение в 1-е уравнение системы (1), получим уравнение:

$$u_y = \frac{C_1(y)}{x},$$

интегрируя которое по  $y$ , найдем

$$u(x, y) = \frac{C_2(y)}{x} + C_3(x).$$

где  $C_2(y)$  и  $C_3(x)$  – произвольные дифференцируемые функции.

## 2 способ

Если  $x \neq 0$ :

$$xu_{xy} + u_y = 0, \quad (xu_y)_x = 0, \quad xu_y = C(y),$$

$$u_y = \frac{C(y)}{x}, \quad u(x, y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x},$$

где  $C_1(x)$  и  $C_2(y)$  – произвольные дифференцируемые функции.

4) Если  $x = 0$ , то для заданного уравнения будем иметь:

$$u_y(0, y) = 0, \quad u(0, y) = C = const.$$

**Ответ:** 
$$u(x, y) = C_1(x) + \frac{C_2(y)}{x}, \quad x \neq 0.$$

с. 55, № 7 (5):  $u_{xy} + \frac{1}{6}u_x = 0$

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_y + \frac{1}{6}v = 0 \end{cases}$$

$$v(x, y) = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u_x = C(x)e^{-\frac{1}{6}y}, \quad u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}y} \int C(x)dx + C_1(y),$$

$u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}y} C_2(x) + C_1(y)$ , где  $C_1(y)$  и  $C_2(x)$  – произвольные дифференцируемые функции.

№ 7 (3):  $u_{xy} + 5u_x = xy^2$

Этапы решения:

$$1) u_{xy} + 5u_x = xy^2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5v = xy^2. \end{cases}$$

2) Построение общего решения уравнения  $v_y + 5v = xy^2$  (\*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения  $v_y + 5v = 0$ :  $v(x, y) = e^{-5y}C(x)$ , где  $C(x)$  – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x).$$

5	$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + D(x)$
1	$(v_{\text{част}})'_y = 2yA(x) + B(x)$

$y^2$ :	$5A(x) = x,$	} $\Rightarrow$	$\begin{cases} A(x) = x/5, \\ B(x) = -2x/25, \\ D(x) = 2x/125. \end{cases}$
$y$ :	$5B(x) + 2A(x) = 0,$		
$y^0$ :	$5D(x) + B(x) = 0.$		

Результат:  $v_{\text{част}}(x, y) = \frac{x}{5} \left( y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25} \right).$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5y}C(x) + \frac{x}{5} \left( y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25} \right).$$

*Замечание.* Общее решение уравнения (\*) может быть построено методом вариации:

Решение неоднородного уравнения (\*) будем искать в виде

$$v(x, y) = C(x, y)e^{-5y}. \quad (1)$$

Подставляя (1) в (\*), получим

$$C'_y(x, y)e^{-5y} - 5C(x, y)e^{-5y} + 5C(x, y)e^{-5y} = xy^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C'_y(x, y) = xy^2e^{5y}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$C(x, y) = \frac{x}{125}e^{5y}(25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x). \quad (2)$$

$$\int xy^2 \cdot e^{5y} dy \text{ simplify} \rightarrow \frac{x \cdot e^{5 \cdot y} \cdot (25 \cdot y^2 - 10 \cdot y + 2)}{125}$$

Подставляя (2) в (1), получим общее решение уравнения (\*):

$$v(x, y) = \frac{x}{125}(25y^2 - 10y + 2) + \tilde{C}(x)e^{-5y}.$$

3) Построение общего решения уравнения  $u_x = v(x, y)$ :

$$u(x, y) = e^{-5y}C_1(x) + \frac{x^2}{10}\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25}\right) + C_2(y), \text{ где } C_1(x) \text{ и}$$

$C_2(y)$  – произвольные дифференцируемые функции.

**Ответ:** 
$$u(x, y) = e^{-5y}C_1(x) + \frac{x^2}{10}\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{2}{25}\right) + C_2(y).$$

с. 55, № 7 (7):  $u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0$

Так как  $y \neq 0$ , то

$$u_{yy} + \frac{1}{y}u_y = 0, \quad yu_{yy} + u_y = 0, \quad (yu_y)_y = 0, \quad yu_y = C_1(x), \quad u_y = \frac{C_1(x)}{y},$$

$u(x, y) = C_1(x) \ln|y| + C_2(x)$ , где  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  – произвольные дифференцируемые функции.

Построить общее решение уравнения:  $u_{xy} + 5xu_x = x + y$ .

Этапы решения:

$$1) \quad u_{xy} + 5xu_x = x + y \Leftrightarrow \begin{cases} v = u_x, \\ v_y + 5xv = x + y. \end{cases}$$

2) Построение общего решения уравнения  $v_y + 5xv = x + y$  (\*):

А) построение общего решения соответствующего однородного уравнения  $v_y + 5xv = 0$ :  $v(x, y) = e^{-5yx} C(x)$ , где  $C(x)$  – произвольная дифференцируемая функция.

Б) построение частного решения по виду правой части методом неопределенных коэффициентов:

$$v_{\text{част}}(x, y) = A(x)y + B(x).$$

$$\text{Результат: } v_{\text{част}}(x, y) = \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$$

В) общее решение:

$$v(x, y) = e^{-5yx} C(x) + \frac{y}{5x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25x^2}, \quad x \neq 0.$$

3) Построение общего решения уравнения  $u_x = v(x, y)$ :

$$u(x, y) = \int C(x) e^{-5xy} dx + \frac{y \ln|x|}{5} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25x} + C_1(y), \quad x \neq 0,$$

где  $C_1(x)$  и  $C_2(y)$  – произвольные дифференцируемые функции.

**Замечание.** Если  $x = 0$ , то для уравнения (\*) имеем:

$$v_y(0, y) = y \Rightarrow v(0, y) = \frac{y^2}{2} + C, \quad C - \text{произвольная константа.}$$

Возвращаясь к замене, получим уравнение:

$$u_x(0, y) = \frac{y^2}{2} + C.$$

Из него решение заданного уравнения при  $x = 0$  путем интегрирования по  $x$  нельзя.



### **Домашнее задание**

С. 55: №№ 7 (2,4,6,8),

Решите уравнение:  $u_{xy} + xu_x = y$ ,  $u = u(x, y)$ .

*Лекция:* Уравнения в частных производных 1-го порядка.

Метод характеристик.