Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

16.04.2020

Занятие № 9

I. Задача Штурма-Лиувилля с периодическими условиями

Найти все значения параметра C, при которых задача

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathrm{R}, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. Найти эти решения.

Замечание. Рассмотреть случаи:

1) $C < 0$, 2) $C = 0$, 3) $C > 0$.

Ответ: $C_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

II. Простейшие краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа: $\Delta u = 0$,

Уравнение Пуассона: $\Delta u = F(M)$

1) $u = u(x, y), \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

2) $u = u(r, \varphi), \quad \Delta u = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} r \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

Гл. 4, § 1, 2

С. 106, № 2,

2. Покажите, что функция $u(r) = \ln\frac{1}{r}$, $\quad r^2 = x^2 + y^2$, является гармонической на всей плоскости, исключая точку в начале координат, которой соответствует $r = 0$.

С. 108, № 7 (1, 3, 6)

7. Внутри кольца $a < r < b$, $\quad 0 \le \phi \le 2\pi$ найти решение $u(r)$ краевых задач:

1) $\quad \Delta u(r) = 0, \quad u(a) = T, \quad u(b) = U;$

3) $\quad \Delta u(r) = 0, \quad u_r(a) = T, \quad u_r(b) = U;$

6) $\quad \Delta u(r) = 0, \quad u(a) = T, \quad u(c) = hu(b), \quad a < c < b, h \neq 0.$

Здесь T, U – заданные постоянные.

С. 108, № 8 (1)

8. Пусть $u(r)$ – гармоническая функция в кольце $K : a < r < b, 0 \le \phi \le 2\pi, 0 < a < b < \infty$, непрерывная в $\overline{K}$.

1) Чему равно $u(a)$, если $u(c) = T, \quad u_r(b) + hu(b) = W.$

Здесь $a < c < b,\ a < d < b$ и T, T_0, U, W – заданные постоянные.

С. 108, № 10 (1)

10. Пусть $u(r)$ – решение уравнения Пуассона $\quad \Delta u(r) = \dfrac{1}{r}, \quad$ в кольце $K : a^2 < x^2 + y^2 = r^2 < b^2$, непрерывное в $\overline{K}$.
Определить значения:

1) $\quad u(a), \quad$ если $\quad u(b) = T_0, \quad u(c) = T;$

Здесь $a < c < b,\ a < d < b$, а T_0, T, U – заданные постоянные.

Домашнее задание

Глава IV. § 1,2, с. 106-108: № **3, 7 (2, 5)**, **8 (2), 10 (2).**