Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001.

19.11.2019

Занятие № 12.

Задача Штурма-Лиувилля

При каких значениях параметра с задача

$$X''(x)+cX(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{1}$$

$$a_1X'(0)+b_1X(0)=0,\quad a_2X'(l)+b_2(l)=0, \tag{2}$$

имеет ненулевое решение.

Собственные значения задачи Ш-Л являются **вещественными**.

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (б): $X'(0)=X(l)=0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если с < 0 (пусть $c=-\lambda^2$, $\lambda\neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0)=\lambda(A-B)=0, \\ X(l)=Ae^{\lambda l}+Be^{-\lambda l}=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A=B=0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если с = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x)=Ax+B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0)=A=0 \;\text{ и }\; X(l)=Al+B=0.$$

Откуда получаем, что $A = B = 0$. А значит, и в этом случае получаем нулевое решение.

3) Если с > 0 (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \ \Rightarrow \ B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X(l) = A\cos(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\cos\lambda l = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, нашли собственные значения[1]:

$$c_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \ n \in N,$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \ \ \forall A_n \neq 0.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, отличаются на постоянный множитель.

Пусть $A_n = 1 \ \forall n \in N$. Тогда $\| X_n \|^2 = \int\limits_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \ dx = \frac{l}{2}$.

Ортогональность собственных функций.

$$(X_k, X_n) = \int\limits_0^l \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(\cos\frac{(k+n+1)\pi x}{l} + \cos\frac{(k-n)\pi x}{l}\right)dx = 0 \ \ \forall k \neq n.$$

---

[1] При отрицательных значениях *n* не будут получены новые значения с.

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \| X_n \|^2 = \frac{l}{2}.$$

Домашнее задание

С. 127, Пример 1;

с. 131, № **23** (в) (+ проверить свойство ортогональности собственных функций, вычислить нормы собственных функций).

26.11.2019

Занятие № 13

Задача Штурма-Лиувилля

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (г): $X'(0) = X'(l) = 0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если с < 0 (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} X'(0) = \lambda(A - B) = 0, \\ X'(l) = \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A = B, \\ B(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $A = B = 0$, т. е. задача (1), (2) имеет **нулевое** решение.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если с = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X'(0) = A = 0 \ \text{ и } \ X'(l) = A = 0.$$

Получаем, что при c = 0 существует ненулевое решение $X(x) = B$, когда B – $\forall$ const ≠ 0. Пусть $B = 1$.

$$c_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \ \| X_0 \|^2 = \int_0^l 1\,dx = l.$$

3) Если c > 0 (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X'(0) = \lambda B = 0 \ \Rightarrow \ B = 0.$$

При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X'(l) = A\lambda \sin(\lambda l) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\sin \lambda l = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda l = \pi n, \quad n \in Z.$$

Таким образом, учитывая условие $\lambda \neq 0$, нашли собственные значения[2]:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ n \in N,$$

и соответствующие собственные функции:

$$X_n(x) = A_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \ \ \forall A_n \neq 0.$$

Пусть $A_n = 1 \ \forall n \in N$, тогда $\| X_n \|^2 = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi\pi}{l}\,dx = \frac{l}{2}$.

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad \| X_n \|^2 = \begin{cases} l, & n = 0, \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

---

[2] При отрицательных значениях n не будут получены новые значения c.

Гл. 5, § 3, с. 131: № 23 (д): $X(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \quad h - const > 0.$

Рассмотрим три случая:

1) Если с < 0 (пусть $c = -\lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

Подчинив его граничным условиям, получим:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ \lambda(Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}) + h(Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ A(\lambda e^{\lambda l} + he^{\lambda l}) + B(he^{-\lambda l} - \lambda e^{-\lambda l}) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Полученная система имеет ненулевое решение (A, B), если определитель матрицы системы равен 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda e^{\lambda l} + he^{\lambda l} & he^{-\lambda l} - \lambda e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; -\lambda(e^{\lambda l} + e^{-\lambda l}) + h(e^{-\lambda l} - e^{\lambda l}) = 0.$$

Очевидно, при $\lambda < 0$ левая часть уравнения больше 0, а при $\lambda > 0$ – отрицательна. Следовательно, уравнение не имеет вещественных корней, отличных от 0. А значит, определитель матрицы системы (*) отличен от 0 при любых $\lambda \neq 0$, и система (*) имеет нулевое решение $A = B = 0$.

Таким образом, собственные значения рассматриваемой задачи Ш-Л не могут быть отрицательными.

2) Если с = 0, то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = Ax + B.$$

Подстановка в граничные условия дает:

$$X(0) = B = 0 \;\text{ и }\; X'(l) + hX(l) = A(1 + hl) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0.$$

Получаем, что при с = 0 существует только нулевое решение $X(x) \equiv 0$.

3) Если с > 0 (пусть $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$), то общее решение уравнения (1):

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Подчиним общее решение граничному условию при $x = 0$:

$$X(0) = A = 0.$$

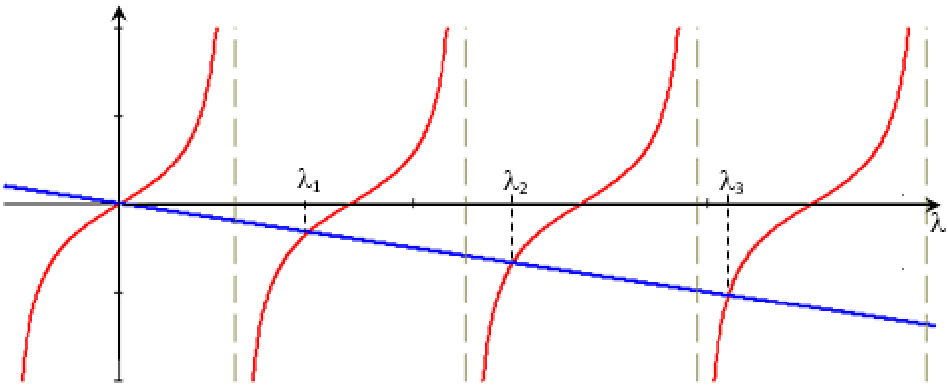
При этом, используя второе граничное условие, получим

$$X'(l) + hX(l) = B(\lambda\cos(\lambda l) + h\sin(\lambda l)) = 0.$$

Ясно, что ненулевое решение задачи Ш-Л будет существовать, если

$$\lambda\cos(\lambda l) + h\sin(\lambda l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}(\lambda l) = -\frac{\lambda}{h}. \qquad (**)$$

Заметим, что, если λ^* является корнем уравнения (**), то и $(-\lambda^*)$ также является корнем уравнения (**). Тогда, так как $c = \lambda^2$, $\lambda \neq 0$, то для нахождения собственных значений следует выяснить, сколько положительных корней имеет уравнение (**). Графическое решение уравнения (**):



позволяет сделать следующий вывод: *существует бесконечное счетное множество положительных корней уравнения* (**) λ_n, $n \in N$.

Следовательно, собственные значения задачи Ш-Л:

$$c_n = \lambda_n^2,$$

где λ_n – положительные корни уравнения (**), и соответствующие им собственные функции:

$$X_n(x) = B_n \sin\lambda_n x, \ \ \forall B_n \neq 0.$$

Пусть $B_n = 1 \ \forall n \in N$, тогда

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l (1-\cos 2\lambda_n x)dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin(2\lambda_n l)}{4\lambda_n}.$$

Так как

$$\sin(2\lambda_n l) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\lambda_n l}{1+\mathrm{tg}^2\,\lambda_n l} \overset{(**)}{=} -\frac{2\lambda_n h}{h^2+\lambda_n{}^2},$$

то

$$\| X_n \|^2 = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_n^2)}.$$

Вывод. Решение задачи Ш-Л:

$$c_n = \lambda_n{}^2, \quad X_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad n \in N, \ \| X_n \|^2 = \frac{l(\lambda_n{}^2 + h^2) + h}{2(\lambda_n{}^2 + h^2)},$$

где λ_n – положительные корни уравнения $\mathrm{tg}(\lambda l) = -\dfrac{\lambda}{h}$.

Ортогональность собственных функций

Рассмотрим собственные функции $X_n(x) = \sin\lambda_n x$, $X_k(x) = \sin\lambda_k x$, соответствующие различным собственным значениям, где $c_n = \lambda_n^2$, $c_k = \lambda_k^2$ – различные корни уравнения (**). Вычислим интеграл

$$\int_0^l X_n X_k dx = \int_0^l \sin\lambda_n x \sin\lambda_k x\ dx = \frac{1}{2}\int_0^l \big(\cos(\lambda_n-\lambda_k)x - \cos(\lambda_n+\lambda_k)x\big)\ dx =$$

$$= \frac{\sin(\lambda_n-\lambda_k)l}{2(\lambda_n-\lambda_k)} - \frac{\sin(\lambda_n+\lambda_k)l}{2(\lambda_n+\lambda_k)} = \frac{1}{2(\lambda_n^2-\lambda_k^2)}\big(\lambda_n(\sin(\lambda_n-\lambda_k)l - \sin(\lambda_n+\lambda_k)l)\big) +$$

$$+\frac{1}{2(\lambda_n^2-\lambda_k^2)}\big(\lambda_k(\sin(\lambda_n-\lambda_k)l + \sin(\lambda_n+\lambda_k)l)\big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2-\lambda_k^2}\big(-\lambda_n \sin\lambda_k l\cdot\cos\lambda_n l + \lambda_k \sin\lambda_n l\cdot\cos\lambda_k l\big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2-\lambda_k^2}\cos\lambda_n l\cdot\cos\lambda_n l\big(-\lambda_n\ \mathrm{tg}\,\lambda_k l + \lambda_k\ \mathrm{tg}\,\lambda_n l\big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2 - \lambda_k^2} \cos\lambda_n l \cdot \cos\lambda_n l \left(-\lambda_n \cdot \left(-\frac{\lambda_k}{h} \right) + \lambda_k \cdot \left(-\frac{\lambda_n}{h} \right) \right) = 0.$$

Домашнее задание

С. 127, Пример 1;
с. 131, № **23**(е) (+ проверить свойство ортогональности собственных функций, вычислить нормы собственных функций).

03.12.2019

Занятие № 14

Разложение функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

Гл. 5, § 3, с. 132: № 25

Разложение функции $f(x)$ **в ряд по системе функций** $\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$

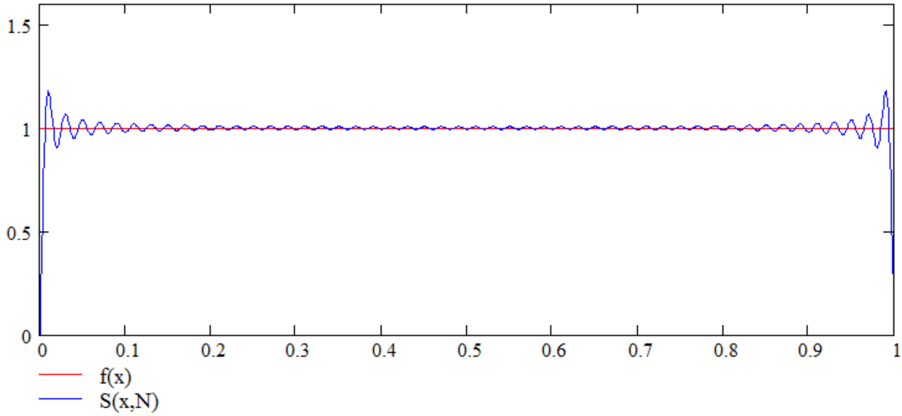
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$S(x,N) = \sum_{n=1}^{N} f_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad f(x) = \lim_{N\to\infty} S(x,N).$$

1) $f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)}{k} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in (0, l).$$

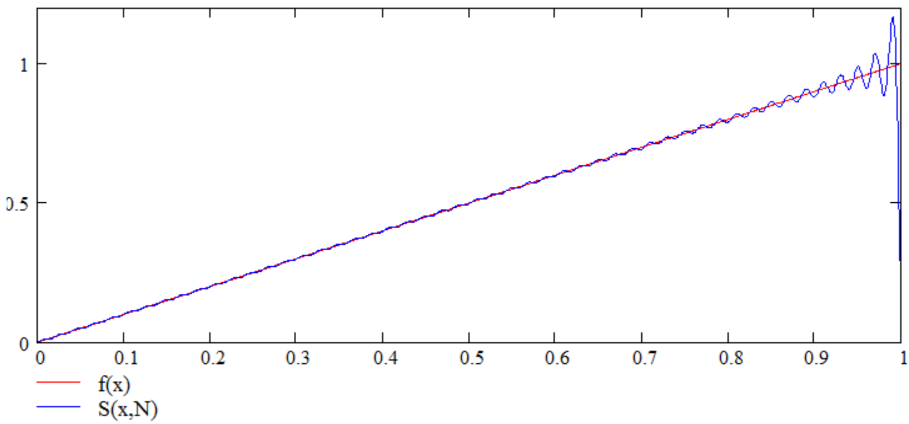
N = 99



2) $f(x) = x$

$$f(x) = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [0, l).$$

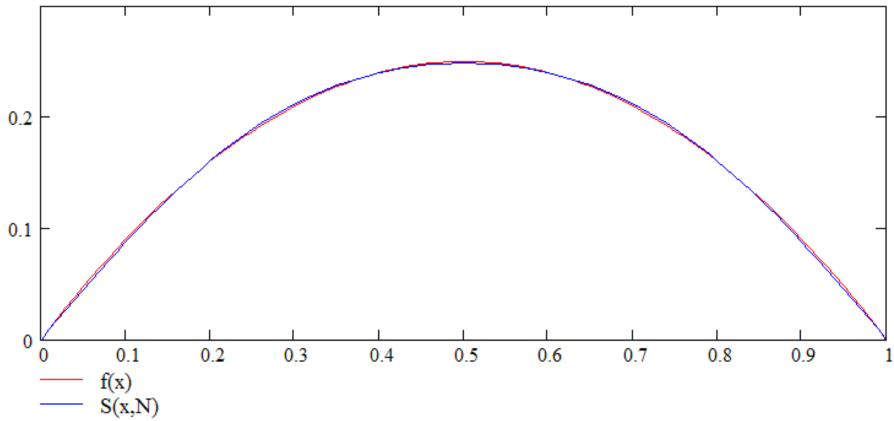
N = 99



3) $f(x) = x(l - x)$

$$f(x) = \frac{4l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)}{k^3} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [1, l].$$

N = 4



Домашнее задание

Гл. 5, § 3, с. 132: № 26.