



5.11.2019

Занятие № 10

Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Формула Даламбера

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad |x| < +\infty. \quad (2)$$

Решение задачи Коши (1)-(2) описывается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3)$$

Гл. 5, § 2, с. 123: № 13 (3)

$$u_{xx} - u_{tt} + 5u_x + 3u_t + 4u = 0, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = xe^{\frac{5}{2}x - x^2}, \quad u_t(x, 0) = e^{\frac{5}{2}x}, \quad |x| < +\infty. \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

определив коэффициенты так, чтобы уравнение которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$, не содержало производных по переменным x и t .

Так как

$$\begin{array}{l|l} 4 & u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t), \\ 5 & u_x = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha v + v_x), \\ 3 & u_t = e^{\alpha x + \beta t} (\beta v + v_t), \\ 1 & u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx}), \\ -1 & u_{tt} = e^{\alpha x + \beta t} (\beta^2 v + 2\beta v_t + v_{tt}), \end{array}$$

то функция $v(x, t)$ и ее производные входят в уравнение с такими коэффициентами:

$$\begin{array}{l|l} v & e^{\alpha x + \beta t} (4 + 5\alpha + 3\beta + \alpha^2 - \beta^2) \\ v_x & e^{\alpha x + \beta t} (5 + 2\alpha) \\ v_t & e^{\alpha x + \beta t} (3 - 2\beta) \\ v_{xx} & e^{\alpha x + \beta t} \\ v_{tt} & -e^{\alpha x + \beta t} \end{array}$$

Тогда, выбрав α и β так, чтобы

$$\begin{cases} 5 + 2\alpha = 0, \\ 3 - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -5/2, \\ \beta = 3/2, \end{cases}$$

получим уравнение, которому должна удовлетворять функция $v(x, t)$:

$$v_{tt} = v_{xx}. \quad (6)$$

А

$$u(x, t) = e^{(-5x+3t)/2} v(x, t), \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в начальные условия (5), получим начальные условия для функции $v(x, t)$:

$$v(x, 0) = xe^{-x^2}, \quad v_t(x, 0) = e^{5x/2} (u_t(x, 0) - \frac{3}{2}u(x, 0)) = 1 - \frac{3}{2}xe^{-x^2}. \quad (8)$$

Таким образом, с помощью преобразования (7) задача Коши (4), (5) приводится к виду (6), (8). Для построения решения задачи Коши (6), (8) используем формулу Даламбера. В результате получим:

$$v(x, t) = t + e^{-x^2 - t^2} \left(x \operatorname{ch} 2xt - \left(t + \frac{3}{4} \right) \operatorname{sh} 2xt \right)$$

Гл. 5, § 2, с. 124: № 17 (в)

Свойство решений задачи Коши (1)-(2) ($f(x, t) \equiv 0$):

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – нечетные и $2l$ -периодические функции, то $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Используя формулу Даламбера (3), найдем:

$$\begin{aligned} 1) \quad u(0, t) &= \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{-\varphi(at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке равен 0.

$$2) \quad u(l, t) = \frac{\varphi(l-at) + \varphi(l+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{l-at}^{l+at} \psi(\xi) d\xi.$$

По свойствам нечетности и $2l$ -периодичности функции φ получим:

$$\varphi(l-at) = -\varphi(-l+at) = -\varphi(-l+at+2l) = -\varphi(l+at).$$

Разбив интеграл на два:

$$\int_{l-at}^{l+at} \psi(\xi) d\xi = \int_{l-at}^l \psi(\xi) d\xi + \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi,$$

Преобразуем первый интеграл, используя свойства нечетности и $2l$ -периодичности функции ψ :

$$\begin{aligned} \int_{l-at}^l \psi(\xi) d\xi &= [\xi = -\eta] = - \int_{-l+at}^{-l} \psi(-\eta) d\eta = \int_{-l+at}^{-l} \psi(\eta) d\eta = \int_{-l+at}^{-l} \psi(\eta+2l) d\eta = \\ &= [\xi = \eta+2l] = \int_{l+at}^l \psi(\xi) d\xi = - \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем:

$$u(l, t) = \frac{-\varphi(l+at) + \varphi(l+at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(- \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi + \int_l^{l+at} \psi(\xi) d\xi \right) = 0.$$



Домашнее задание

С. 123-124: № 13 (7), № 15.